

TERMODINAMICĂ

A. HRISTEV

**PROBLEME
REZOLVATE
DE
FIZICĂ**

**EDITURA APH
BUCUREȘTI**

Dr. Fiz. **ANATOLIE HRISTEV**

PROBLEME REZOLVATE

DE

FIZICĂ

**TERMODINAMICĂ.
FIZICĂ MOLECULARĂ.
CĂLDURĂ**



EDITURA APH București

BREVIAR

Molul este cantitatea de substanță a unui sistem care conține tot atâtea entități elementare câți atomi există în 12 g de carbon 12. Entitățile elementare pot fi atomi, molecule, ioni, electroni, alte particule sau grupuri specificate de asemenea particule.

Unitatea atomică de masă este egală cu a 12-a parte din masa atomului de carbon ^{12}C . Atunci rezultă:

$$1 \text{ u [kg]} = 10^{-3} : \{N_A [\text{mol}^{-1}]\} . \quad (1)$$

Masa molară μ [kg/mol] și masa moleculară M [u] sunt legate prin relația: μ [kg/mol] = $10^{-3} M$ [u]. (2)

Legea lui Dalton. Presiunea unui amestec de gaze este egală cu suma presiunilor parțiale ale gazelor componente. Prin presiunea parțială a unui gaz component se înțelege presiunea pe care ar exercita-o acel gaz component dacă ar ocupa singur întregul volum al amestecului la aceeași temperatură, adică abstracție făcând de prezența celorlalte gaze din amestec :

$$p = \sum p_k = \sum \frac{m_k}{\mu_k} \frac{RT}{V} = \sum v_k \frac{RT}{V} = \sum_i n_i kT. \quad (3)$$

Observație. În problemele unde apar coloane de lichid (apă, mercur, etc.) este comod să exprimăm presiunile în **mm.col.lich.** Unitatea **mm.col.lich.** este egală cu presiunea exercitată de o coloană de 1 mm din acel lichid la temperatura 0°C și accelerația gravitațională normală $g_n = 9,80665 \text{ m/s}^2$:

$$1 \text{ mm.col.lich.} = \rho_o g_n \cdot 10^{-3} \text{ Pa} . \quad (4)$$

Atunci presiunea unei coloane (sau pături) de lichid exprimată în mm.col.lich. este

$$H_{[\text{mm.col.lich.}]} = \frac{\rho g h_{[\text{m}]}}{\rho_o g_n \cdot 10^{-3}} = \frac{\rho g}{\rho_o g_n} h_{[\text{mm}]} . \quad (5)$$

Dacă neglijăm corecțiile de temperatură (densitate) și gravitație :

$$H_{[\text{mm.col.lich.}]} \cong h_{[\text{mm}]} \cdot \quad (6)$$

Pentru mercur avem aproximativ:

$$\rho g \cong 133 \text{ kPa/m} \cong (400/3) \text{ kPa/m} = (4/3) \text{ kPa/cm} \cdot \quad (7)$$

Presiunea atmosferică *normală*: $p_0 = 101,325 \text{ kPa} = 760 \text{ torr}$, deci

$$p_0 / [\rho_{\text{Hg}} g_n] = 0,760 \text{ m} \text{ și } p_0 / [\rho_{\text{ap}} g_n] = 10,332 \text{ m} \cdot \quad (8)$$

*

Lucrul mecanic elementar efectuat de gaz într-o destindere (cvasistatică, de echilibru) *elementară* (parametrii de stare V, p, T se schimbă infinit de puțin) :

$$dL = p dV \text{ , de unde } L = \int dL = \int_{V_1}^{V_2} p dV \cdot \quad (9)$$

Pentru a putea efectua integrarea trebuie exprimată presiunea p ca funcție de volumul V în procesul considerat.

Ecuția primului principiu al termodinamicii :

$$dQ = dU + dL \text{ sau } Q = \Delta U + L \text{ ,} \quad (10)$$

unde pentru gaze *perfecte* (ecuația **calorică de stare**) :

$$dU = \nu C_V dT \text{ (legea lui Joule)} \cdot \quad (11)$$

Definiția căldurilor *molare* (indicele din dreapta derivatei indică care parametru se menține *constant* la derivare) :

$$C_V = \frac{1}{\nu} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V = \frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \text{ , } C_p = \frac{1}{\nu} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p = \frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p \text{ ,} \quad (12)$$

unde $H = U + pV$

este **entalpia** (funcție de stare). (13)

Teoria clasică a căldurilor molare la gaze ideale :

Gaze:	C_V , J/(mol · K)	C_p , J/(mol · K)	$\gamma = C_p/C_V = c_p/c_v$
<i>monoatomice</i> (He, Ne, Ar, Kr, X, Rn)	$3 R/2 = 12,5$	$5 R/2 = 20,8$	$5/3 = 1,67$
<i>diatomice</i> (H_2, O_2, N_2, CO, NO)	$5 R/2 = 20,8$	$7 R/2 = 29,1$	$7/5 = 1,40$
<i>triatomice sau poli-</i> <i>atomice</i> (fără vibrația atomilor) (O_3, CO_2, NH_3, CH_4)	$6 R/2 = 3 R =$ $= 24,9$	$4 R = 33,3$	$4/3 = 1,33$

La gazele *monoatomice* avem numai energia cinetică de translație $\frac{1}{2} m_0 \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT$. La gazele *diatomice* se adaugă și energia cinetică de rotație (modelul *halteră* al moleculei), în total $5kT/2$. La gazele *triatomice* sau *poliatomice*, fără vibrația atomilor în moleculă (moleculă "rigide"), avem în total $3kT$.

Principiul II al termodinamicii afirmă existența unei funcții de stare numită **entropie**. Într-un proces *reversibil* :

$$dS = dQ / T, \quad dQ = T dS \quad (14)$$

și combinând cu principiul I :

$$T dS = dU + dL. \quad (15)$$

*

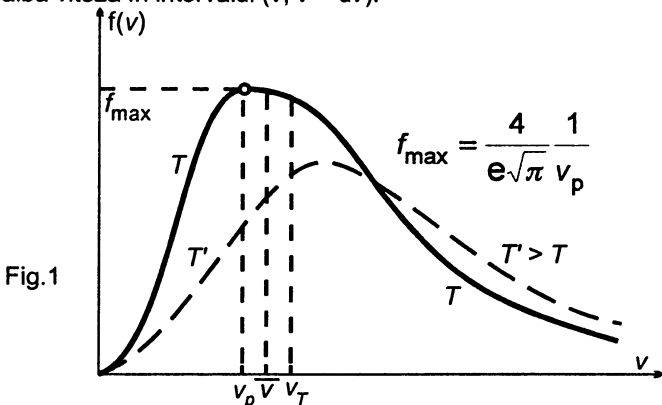
Distribuția moleculelor după viteze (Maxwell 1859):

$$dn(v) = n \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m_0 v^2 / (2kT)} 4\pi v^2 dv = nf(v) dv, \quad (16)$$

unde $dn(v)$ este numărul de molecule din unitatea de volum care au modulul vitezei cuprins în intervalul $(v, v+dv)$, m_0 - masa unei molecule,

$$\frac{dn(v)}{ndv} = f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m_0 v^2 / (2kT)} \quad (17)$$

reprezintă **funcția de distribuție** sau **densitatea de probabilitate**, adică probabilitatea ca o moleculă să aibă viteza în intervalul $(v, v+dv)$ raportată la intervalul dv (per unitate de interval de viteze) (fig.1) sau, altfel, $dP = f(v)dv$ reprezintă probabilitatea ca o moleculă să aibă viteza în intervalul $(v, v + dv)$.



Numărul de molecule care lovesc o arie elementară dS a unui perete, în intervalul de timp infinitezimal dt și au modulul vitezei cuprins în intervalul infinitezimal $(v, v+dv)$ este

$$(1/4) n f(v) v dv dS dt,$$

de unde rezultă numărul de molecule care lovesc *unitatea* de arie a unui perete, în *unitatea* de timp și au modulul vitezei în intervalul $(v, v+dv)$:

$$dN_0(v) = (1/4) n f(v) v dv. \quad (18)$$

Integrând după viteze, găsim numărul total de molecule care lovesc unitatea de arie a unui perete, în unitatea de timp:

$$\int dN_0 = N_0 = \frac{1}{4} n \int v f(v) dv = \frac{1}{4} n \bar{v}, \quad (19)$$

ceea ce reprezintă *densitatea fluxului* (curentului) de molecule, $\bar{v} = \sqrt{8RT/(\pi\mu)}$ este viteza *medie* a moleculelor.

Distribuția moleculelor după coordonate (Boltzmann) :

$$dN(x,y,z) = \text{const} \cdot e^{-\varepsilon_p/(kT)} dV \quad (20)$$

sau

$$\rho(x,y,z) = \text{const} \cdot e^{-\varepsilon_p/(kT)}, \quad (21)$$

unde $dN(x,y,z)$ este numărul de molecule din elementul de volum dV situat în punctul (x,y,z) , $\varepsilon_p(x,y,z)$ este energia potențială a particulei, ρ - densitatea.

Formula barometrică dă distribuția în înălțime a densității gazului, a presiunii sau a concentrației moleculelor (la $T = \text{const}$ și $g = \text{const}$):

$$\rho = \rho_0 e^{-\mu gz/(RT)}, \quad n = n_0 e^{-\mu gz/(RT)}, \quad (22)$$

$$p = p_0 e^{-\mu gz/(RT)}, \quad (23)$$

unde μ este masa molară ($\mu_{\text{aer}} = 28,97 \text{ g/mol} \cong 29 \text{ g/mol}$).

*

Coeficientul de tensiune superficială σ este egal cu forța tangentă la planul peliculei și normală la conturul peliculei, raportată la lungimea marginii peliculei superficiale de lichid (forța pe unitatea de lungime) sau altfel, este egal cu minus lucrul mecanic efectuat *izoterm* de pelicula superficială raportat la aria peliculei (energia superficială pe unitatea de arie) :

$$\sigma = \frac{dF}{ds} = -\frac{dL}{dS}, \quad [\sigma] = \text{N/m} = \text{J/m}^2. \quad (24)$$

La o peliculă superficială *curbată* presiunea de partea concavă este mai mare decât de partea convexă cu *saltul de presiune* (formula lui Laplace) :

$$\Delta p = 2\sigma/R \text{ (sferă)}, \Delta p = \sigma/R \text{ (cilindru)}, \quad (25)$$

unde R este *raza de curbură* a meniscului sferic sau cilindric.

Fig.2 a

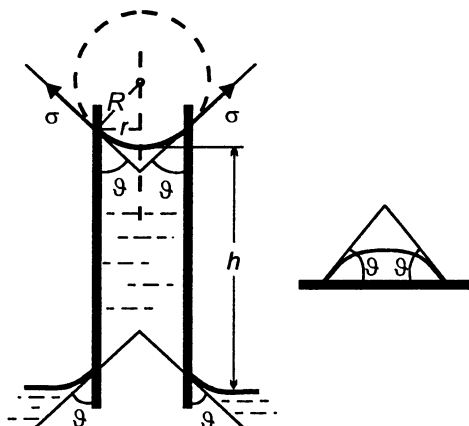
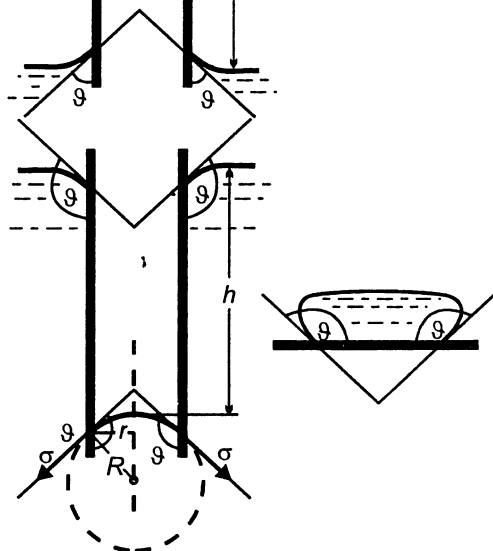


Fig.2 b



Ascensiunea (sau **depresiunea**) capilară este dată de **legea lui Jurin** (R - raza de curbură a meniscului, r - raza tubului, d - distanța dintre plăci) :

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g R} = \frac{2\sigma \cos \vartheta}{\rho g r} \quad (\text{tub}) \quad (26)$$

$$h = \frac{\sigma}{\rho g R} = \frac{2\sigma \cos \vartheta}{\rho g d} \quad (\text{plăci paralele}), \quad (27)$$

unde ϑ este **unghiul de racordare** (de umectare), egal cu zero la lichidele care udă *perfect* pereții, și egal cu π la cele care *nu* udă *deloc* (fig.2).

*

Viteza de evaporare v [kg/s] a unui lichid :

$$v = KS \frac{p_s - p_v}{H}, \quad (28)$$

unde K este o constantă de proporționalitate, S - aria suprafeței libere prin care se produce evaporarea, $p_s - p_v$ - *deficitul higrometric*, p_s - presiunea vaporilor *saturați* la temperatura evaporării (vaporii *saturați* sunt vaporii în **echilibru termic** cu lichidul din care provin), p_v - presiunea **actuală** a vaporilor din vecinătatea suprafeței de evaporare.

Umiditatea absolută a aerului este egală cu *densitatea* vaporilor de apă conținuți în aerul respectiv (ρ_v în g/m^3).

Umiditatea relativă :

$$U = \rho_v / \rho_s = p_v / p_s, \quad (29)$$

unde ρ_v, p_v sunt densitatea și presiunea **actuale** ale vaporilor de apă din aer, iar ρ_s, p_s corespund vaporilor *saturați* la aceeași temperatură.

Punctul de rouă este temperatura la care vaporii din aer devin *saturați* prin răcirea unui volum de aer.

* * *

1. LEGILE GAZULUI PERFECT

1.1. Transformările izocoră și izobară

1.1.1. O butelie a fost astupată la temperatura $t_1 = 27^\circ\text{C}$ și la presiunea atmosferică $p_1 = 100 \text{ kPa}$ cu un dop de secțiune $S = 4,0 \text{ cm}^2$, depunând un efort $F = 10,0 \text{ N}$. Până la ce temperatură trebuie încălzită butelia pentru ca dopul să sară ?

Rezolvare. Inițial, la introducerea dopului, presiunea gazului din butelie era egală cu presiunea atmosferică, deci forța depusă F trebuie să învingă forța de frecare dintre dop și pereții de sticlă : $F = F_f$. Prin încălzirea buteliei, presiunea gazului din interior crește, conform legii transformării izocore (legea lui **Charles**):

$$p_2 / p_1 = T_2 / T_1, \quad p_2 = p_1 T_2 / T_1. \quad (1)$$

Forța asupra dopului generată de diferența de presiune din interior și exterior trebuie să învingă forța de frecare pentru a putea azvârli dopul, deci

$$(p_2 - p_1)S \geq F = F_f, \quad p_1(T_2 / T_1 - 1)S = F, \quad (2)$$

$$T_2 = T_1 [F / (Sp_1) + 1] = 375 \text{ K} = 102^\circ\text{C}. \quad (3)$$

1.1.2. Un vas izolat este împărțit în două compartimente printr-un perete termoconductor. Inițial gazele din compartimente au temperaturile $t_1 = 17^\circ\text{C}$ și $t_2 = 127^\circ\text{C}$ și raportul presiunilor este $p_1 / p_2 = 2,9$. Care va fi raportul presiunilor după terminarea schimbului de căldură ?

Rezolvare. Fiecare gaz din compartimentul său suferă o transformare izocoră (T' - temperatura finală comună de echilibru):

$$p_1' / p_1 = T' / T_1, \quad p_2' / p_2 = T' / T_2. \quad (1)$$

Împărțind membru la membru cele două ecuații, obținem :

$$(p_1' / p_2') (p_2 / p_1) = T_2 / T_1 \rightarrow p_1' / p_2' = p_1 T_2 / (p_2 T_1) = 4,0. \quad (2)$$

1.1.3. O eprubetă de lungime $l = 16 \text{ cm}$ este cufundată în într-o rigă cu capătul său deschis în mercur la temperatura $t = 27^\circ\text{C}$ și presiunea atmosferică normală, astfel încât coloana de aer are lungimea $h = 40 \text{ mm}$. Se scoate eprubeta vertical afară, astfel ca gura ei să se atingă totuși de suprafața mercurului, ca în figură. Cu câte grade trebuie răcită acum eprubeta pentru ca coloana de aer să revină la lungimea sa inițială ?

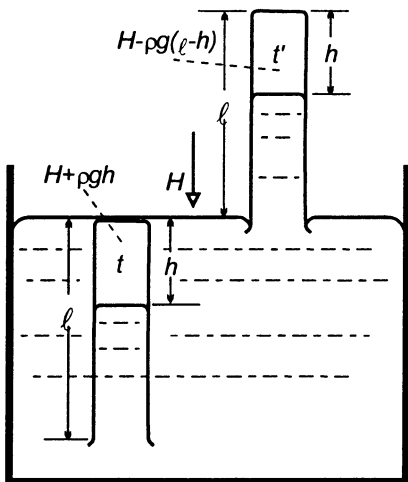


Fig.1.1.3

Rezolvare. Inițial aerul ocupă volumul Sh la temperatura t și presiunea $H + \rho gh$ (presiunea atmosferică H plus presiunea hidrostatică a stratului de mercur ρgh). Final, aceeași masă de aer ocupă același volum (deci transformare izocoră) la temperatura t' și presiunea $H - \rho g(\ell - h)$, adică presiunea atmosferică H minus presiunea hidrostatică a coloanei de mercur $\rho g(\ell - h)$:

$$[H - \rho g(\ell - h)] : [H + \rho gh] = (T - \Delta T) : T, \quad (1)$$

$$\Delta T = T - T[H - \rho g(\ell - h)] : [H + \rho gh] = T \ell : [h + H/(\rho g)] = 60 \text{ K}. \quad (2)$$

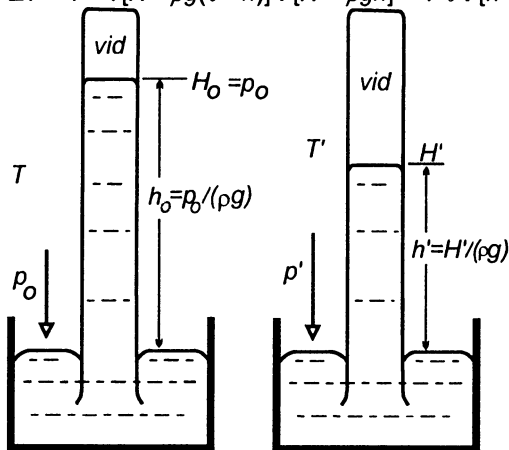


Fig.1.1.4

1.1.4. În cabina unei nave spațiale presiunea inițială a fost cea normală. În timpul decolării verticale cu accelerația $a = 9,8 \text{ m/s}^2$, barometrul cu mercur începe să arate presiunea $H' = 55,73 \text{ kPa}$. De câte ori a crescut temperatura absolută Kelvin din cabină ?

Rezolvare. Presiunea atmosferică H este echilibrată de presiunea hidrostatică a coloanei de mercur $H = \rho gh$. Barometrul este etalonat conform înălțimii barometrice h , dar în condiții standard de 0°C și accelerație gravitațională normală $g_n = 9,80665 \text{ m/s}^2$. Prin urmare, presiunea hidrostatică depinde nu numai de densitatea lichidului folosit, ci și de accelerația gravitațională g (intensitatea câmpului gravitațional). Dar, dacă barometrul urcă cu accelerația \vec{a} , totul se petrece ca și cum barometrul ar sta pe loc, dar ar mai acționa suplimentar un câmp gravitațional echivalent $\vec{g}_{\text{ech}} = -\vec{a}$, care se adaugă la cel existent: $\vec{g}' = \vec{g} + \vec{g}_{\text{ech}} = \vec{g} - \vec{a}$. În cazul problemei sensul lui $-\vec{a}$ este același cu \vec{g} , mercurul devine mai "greu" și presiunea coloanei de mercur va fi în al doilea caz: $h' \rho g' = h' \rho (g + a) = [H' / (\rho g)] \rho (g + a) = H'(g + a) / g = p'$, (1) egală cu presiunea din cabină. Cum aerul din cabină suferă o transformare izocoră, avem:

$$T' / T = p' / p_0 = [H'(g + a) / g] : p_0 = 1,10 . \quad (2)$$

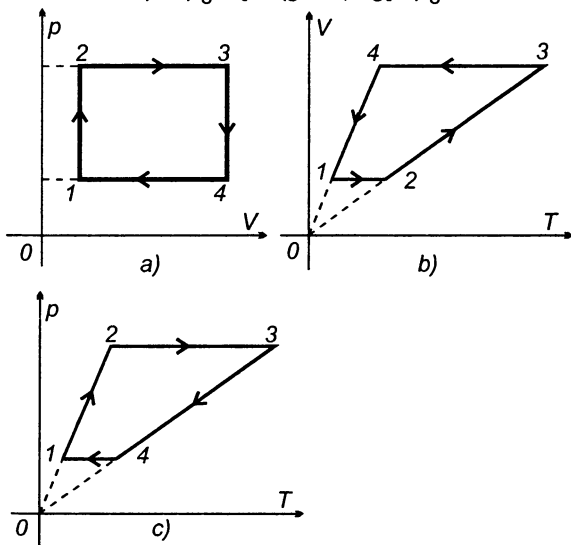


Fig.1.1.5

1.1.5. Pentru ciclul din figură se dau temperaturile : $T_1 = 300$ K, $T_2 = 400$ K, $T_3 = 500$ K. Aflați T_4 . Desenați ciclul în diagramele $V - T$ și $p - T$.

Rezolvare. Avem succesiv pentru transformările izocore :

$$\begin{aligned} p_2/p_1 = T_2/T_1, \text{ dar } p_2/p_1 = p_3/p_4 = T_3/T_4 \rightarrow \\ T_2/T_1 = T_3/T_4, \quad T_4 = T_1 T_3/T_2 = 375 \text{ K.} \end{aligned} \quad (1)$$

Se poate judeca și folosind transformările izobare :

$$V_4/V_1 = T_4/T_1 \text{ dar } V_4/V_1 = V_3/V_2 = T_3/T_2 \rightarrow T_4/T_1 = T_3/T_2.$$

În diagramele $V - T$, $p - T$ izobarele, respectiv izocorele sunt drepte care trec prin *origine*. Observăm că în $V - T$ sensul de parcurgere a ciclului se inversează.

* *

1.2. Transformarea izotermă

1.2.1. *Transcrieți ciclul din fig.1.2.1 a în diagramele $p - V$; $p - T$.*

Rezolvare. V. fig.1.2.1 b, c. Observăm că în diagramele $V - T$, $p - T$ izobarele, respectiv izocorele sunt *drepte* care trec prin origine.

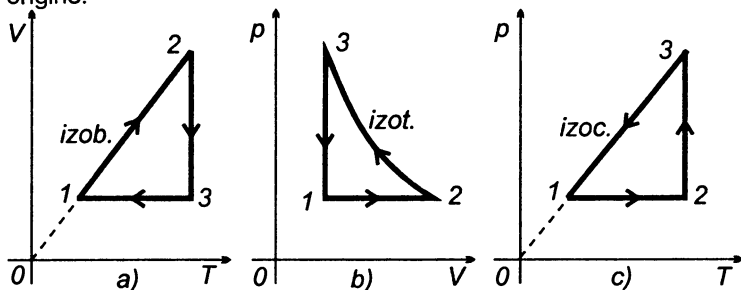


Fig.1.2.1

1.2.2. *Reprezentați ciclul din fig.1.2.2 a în diagramele $V - T$, $p - T$.*

Rezolvare. V. fig.1.2.2 b, c. În diagrama $V - T$ sensul de parcurgere a ciclului se inversează.

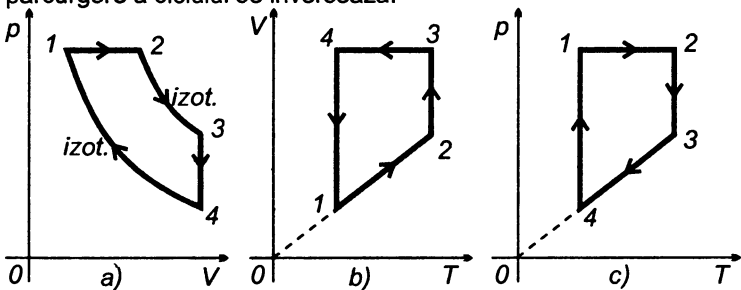


Fig.1.2.2

1.2.3. *Transcrieți ciclul din fig.1.2.3 a în diagramele $V - T$ și $p - T$.*

Rezolvare. V. fig.1.2.3 b, c.

1.2.4. *Se dă ciclul din fig.1.2.2 a. Completați tabelul cunoscând parametrii în starea 1. Transcrieți ciclul în diagramele $V - T$, $p - T$.*

Rezolvare. V. fig.1.2.2 b, c.

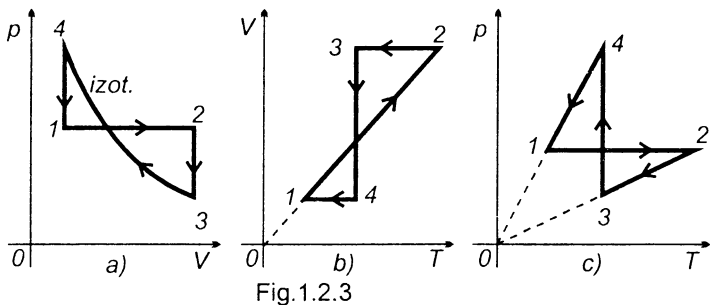


Fig.1.2.3

	p	V	T
1	p_1	V_1	T_1
2			βT_1
3		αV_1	
4			

	p	V	T
1	p_1	V_1	T_1
2	p_1	βV_1	βT_1
3	$\beta p_1 / \alpha$	αV_1	βT_1
4	p_1 / α	αV_1	T_1

Transformarea 1 - 2 este izobară, deci

$$V_2 / V_1 = T_2 / T_1 = \beta T_1 / T_1 \rightarrow V_2 = \beta V_1. \quad (1)$$

Transformarea 2 - 3 este izotermă, deci

$$p_2 V_2 = p_1 (\beta V_1) = p_3 V_3 = p_3 (\alpha V_1) \quad p_3 = \beta p_1 / \alpha. \quad (2)$$

Transformarea 3 - 4 este izocoră, deci

$$p_3 / p_4 = [\beta p_1 / \alpha] : p_4 = T_3 / T_4 = T_2 / T_1 = \beta T_1 / T_1 \rightarrow p_4 = p_1 / \alpha. \quad (3)$$

1.2.5. Un aerostat a fost umplut cu $f = 50\%$ din volumul său cu heliu la presiunea atmosferică $H = 100$ kPa. La ce înălțime heliul va umfla complet aerostatul, știind că gradientul presiunii atmosferice este $p^* = -10,0$ Pa/m ? Temperatura se consideră constantă.

Rezolvare. La altitudinea h presiunea va fi $H + p^* h$. Atunci legea **Boyle-Mariotte** dă

$$H \cdot fV = (H + p^* h) V, \quad (1)$$

$$h = (1 - f) H / (-p^*) = 5,0 \text{ km}. \quad (2)$$

1.2.6. Un cilindru orizontal este împărțit în două compartimente de lungime $h_1 = 10$ cm , $h_2 = 30$ cm printr-un piston care se poate mișca etanș fără frecări și care inițial este blocat. În primul compartiment presiunea este de $k = 3,0$ ori mai mare decât în al doilea. Cu cât se deplasează pistonul dacă se lasă liber ?

Rezolvare. În starea finală de echilibru presiunea gazului de o parte și de alta a pistonului va fi aceeași, p' . Gazul din fiecare compartiment suferă o transformare *izotermă* la temperatura mediului ambiant :

$$k p \cdot h_1 S = p'(h_1 + x)S ; \quad p h_2 S = p'(h_2 - x)S , \quad (1)$$

de unde, împărțind ecuațiile membru la membru, rezultă :

$$k h_1 / h_2 = (h_1 + x) / (h_2 - x) , \quad x = h_1 (k - 1) : (1 + k h_1 / h_2) = 10 \text{ cm} . \quad (2)$$

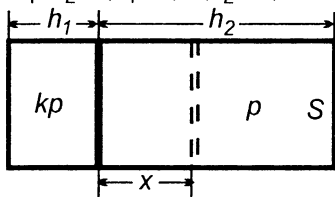


Fig.1.2.6

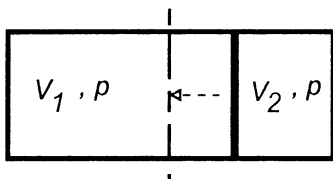


Fig.1.2.7

1.2.7. Un piston, care se poate mișca etanș fără frecări, împarte un cilindru orizontal în două compartimente cu raportul volumelor $V_1/V_2 = k = 3,0$, conținând gaze la aceeași temperatură și la aceeași presiune $p = 100 \text{ kPa}$. Care va fi diferența de presiune dintre compartimente dacă deplasăm pistonul la mijloc ?

Rezolvare. Gazul din fiecare compartiment suferă o transformare *izotermă* :

$$p V_1 = p_1' \cdot (V_1 + V_2) / 2 , \quad p V_2 = p_2' \cdot (V_1 + V_2) / 2 , \quad (1)$$

de unde, prin împărțire membru la membru, respectiv prin adunare membru cu membru, obținem :

$$V_1 / V_2 = k = p_1' / p_2' , \quad p = (p_1' + p_2') / 2 , \quad (2)$$

de unde rezultă:

$$(V_1 - V_2) : (V_1 + V_2) = (k - 1) : (k + 1) = (p_1' - p_2') : (p_1' + p_2') \rightarrow \\ p_1' - p_2' = 2 p (k - 1) : (k + 1) = 100 \text{ kPa} . \quad (3)$$

1.2.8. Un vas cilindric orizontal este împărțit în n compartimente cu ajutorul a $n - 1$ pistoane ușoare care se pot mișca etanș fără frecări. Inițial pistoanele sunt blocate astfel încât volumele și presiunile sunt respectiv $V_i, p_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$. Ce presiune se stabilește în compartimente dacă pistoanele sunt deblocate ($T = \text{const}$) ?

Rezolvare. În starea finală de echilibru presiunea va fi peste tot aceeași p' . Gazul din fiecare compartiment suferă o transformare *izotermă* :

$$p_i V_i = p' V_i', \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (1)$$

Sumăm aceste ecuații membru cu membru :

$$\sum p_i V_i = \sum p' V_i' = p' \sum V_i', \quad (2)$$

dar *suma* volumelor rămâne aceeași (volumul total al cilindrilor):

$$\sum V_i' = \sum V_i \rightarrow \sum p_i V_i = p' \sum V_k, \quad p' = (\sum p_i V_i) : (\sum V_k). \quad (3)$$

1.2.9. O pompă cu volumul de lucru $v = 20 \text{ cm}^3$ este conectată la un vas de volum $V = 10 \text{ L}$. Întâi pompa efectuează $N = 1000$ curse (sau rotații) ca compresor, după care este conectată invers ca pompă de vid și efectuează același număr de rotații. Care va fi presiunea finală din vas dacă presiunea atmosferică este normală ?

Rezolvare. În cazul *compresorului*, la fiecare cursă, din aerul atmosferic se ia un volum v de aer la presiunea H și se introduce în vas, deci la N curse se ia în total un volum Nv la presiunea atmosferică H și se introduce *izoterm* în vas, unde va avea presiunea *parțială* $p' = H Nv / V$ care se adaugă la presiunea atmosferică existentă inițial în vas :

$$p_0 = H + H Nv / V = H (1 + Nv / V). \quad (1)$$

De la această presiune începe vidarea vasului. Pentru *prima* cursă de vidare, aerul din vas se destinde *izoterm* până la volumul $V + v$ căpătând presiunea

$$p_1 (V + v) = p_0 V, \quad p_1 = p_0 [V / (V + v)]. \quad (2)$$

De la această presiune începe a *doua* cursă de vidare, analog primei curse:

$$p_2 (V + v) = p_1 V, \quad p_2 = p_1 [V / (V + v)] = p_0 [V / (V + v)]^2 \quad (3)$$

și așa mai departe până la ultima cursă :

$$p_N = p_{\text{fin}} = p_0 [V / (V + v)]^N =$$

$$= H (1 + Nv / V) [V / (V + v)]^N = 41,22 \text{ kPa}. \quad (4)$$

1.2.10. Un tub subțire închis la un capăt conține gaz care este închis printr-o coloană de mercur de lungime $h = 10 \text{ cm}$. În poziție orizontală coloana de gaz are lungimea $\ell_0 = 40 \text{ cm}$. În poziția verticală cu capătul deschis în sus coloana de gaz are lungimea $\ell_1 = 36 \text{ cm}$. Care este presiunea atmosferică ? Care va fi lungimea coloanei de gaz în poziția verticală cu capătul deschis în jos ?

Rezolvare. Masa de gaz închisă în tub suferă transformări *izoterme* (la temperatura mediului ambiant). În poziția *orizontală*

presiunea gazului din interior este egală cu presiunea aerului din exterior (altfel coloana de mercur s-ar deplasa).

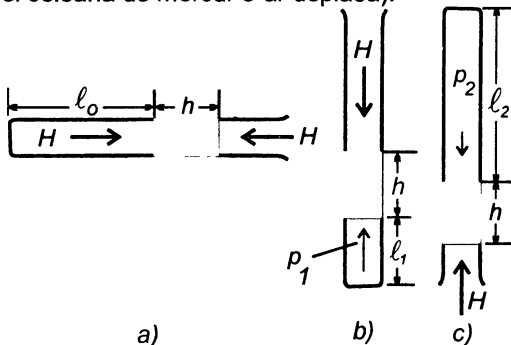


Fig.1.2.10

În prima poziție verticală presiunea gazului p_1 se compune din presiunea *hidrostatică* exercitată de coloana de mercur de deasupra (ρgh) la care se adaugă presiunea atmosferică : $p_1 = \rho gh + H$.

În a doua poziție verticală presiunea atmosferică H de la marginea inferioară a coloanei de mercur trebuie să echilibreze presiunea *hidrostatică* a coloanei de mercur de deasupra, ρgh , plus presiunea gazului din interior : $H = \rho gh + p_2$.

Scriem **legea Boyle - Mariotte** :

$$H \cdot l_0 S = p_1 \cdot l_1 S = p_2 l_2 S \quad (1)$$

$$\text{sau } H l_0 = (H + \rho gh) l_1 = (H - \rho gh) l_2. \quad (2)$$

Din prima ecuație avem

$$H = \rho gh [l_1 / (l_0 - l_1)] = 119,7 \text{ kPa}, \quad (3)$$

$$\text{iar din prima cu ultima : } l_2 = l_0 [l_1 / (2l_1 - l_0)] = 45 \text{ cm}. \quad (4)$$

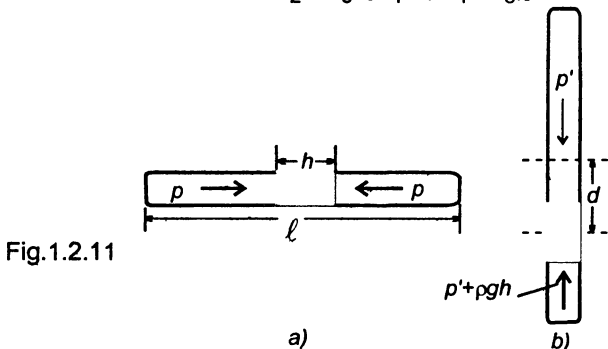


Fig.1.2.11

1.2.11. În mijlocul unui tub de lungime $\ell = 100$ cm se află o coloană de mercur de lungime $h = 20$ cm . Ridicând tubul din poziția orizontală în cea verticală coloana de mercur se deplasează cu $d = 20$ cm . Care a fost presiunea inițială a aerului din tub ?

Rezolvare. În poziția *orizontală* presiunea de o parte și de alta a coloanei de mercur este aceeași (la echilibru). În poziția *verticală* presiunea aerului din compartimentul inferior trebuie să echilibreze presiunea *hidrostatică* a coloanei de mercur de deasupra, ρgh , plus presiunea p' exercitată de aerul din compartimentul superior : $\rho gh + p'$. Aerul din fiecare compartiment suferă o transformare *izotermă* (secțiunea S a tubului se simplifică) :

$$p \cdot (\ell - h)/2 = p' [(\ell - h)/2 + d], \quad p \cdot (\ell - h)/2 = (p' + \rho gh) [(\ell - h)/2 - d]. \quad (1)$$

Scoatem presiunea p' din prima ecuație și o introducem în a doua;

$$\text{rezultă :} \quad p = \rho gh [(\ell - h)^2 - 4d^2] : [4d(\ell - h)] = 20 \text{ kPa}. \quad (2)$$

1.2.12. În mijlocul unui tub subțire orizontal, închis la capete, se află în echilibru o coloană de mercur de lungime $h = 19,6$ cm . Dacă punem tubul sub un unghi $\alpha = 30^\circ$ față de orizontală, coloana de mercur se deplasează cu $d_1 = 20$ mm, iar dacă punem tubul vertical, ea se deplasează cu $d_2 = 30$ mm, ca în figură. Aflați presiunea aerului din tub în poziția orizontală.

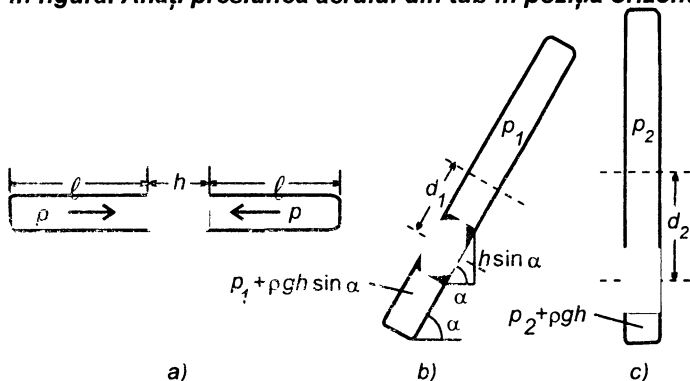


Fig.1.2.12

Rezolvare. Observăm că presiunea din compartimentul inferior este egală cu presiunea *hidrostatică* a coloanei de mercur de deasupra $\rho gh \sin \alpha$ (înălțimea coloanei măsurată pe *verticală*), respectiv ρgh , la care se adaugă presiunea aerului din compartimentul superior. Aerul din fiecare compartiment suferă o

succesiune de transformări *izoterme* (la temperatura mediului ambiant) (secțiunea S a tubului se simplifică) :

$$\rho \ell = \rho_1 (\ell + d_1) = \rho_2 (\ell + d_2) , \quad (1)$$

$$\rho \ell = (\rho_1 + \rho gh \sin \alpha)(\ell - d_1) = (\rho_2 + \rho gh)(\ell - d_2) . \quad (2)$$

Din (1) scoatem $\rho_{1,2}$ pe care le introducem în (2), obținem două ecuații din care eliminăm ℓ și obținem

$$\rho = (1/2) (\rho gh \sin \alpha) \cdot (d_2^2 - d_1^2) : \\ = [d_1 d_2 (d_1 - d_2 \sin \alpha) (d_2 - d_1 \sin \alpha)]^{1/2} = 13,3 \text{ kPa} . \quad (3)$$

1.2.13. În mijlocul unui tub orizontal închis la ambele capete se află o coloană de mercur de lungime $h = 30 \text{ cm}$, fiecare coloană de aer având lungimea $\ell = 0,50 \text{ m}$. Presiunea atmosferică este $H = 100 \text{ kPa}$. Punând tubul vertical, mercurul se deplasează cu $d = 10 \text{ cm}$. Cu cât se deplasează mercurul față de mijlocul tubului dacă: a) se deschide un capăt al tubului în poziție orizontală, b) se deschide capătul superior în poziție verticală, c) se deschide capătul inferior în poziție verticală ?

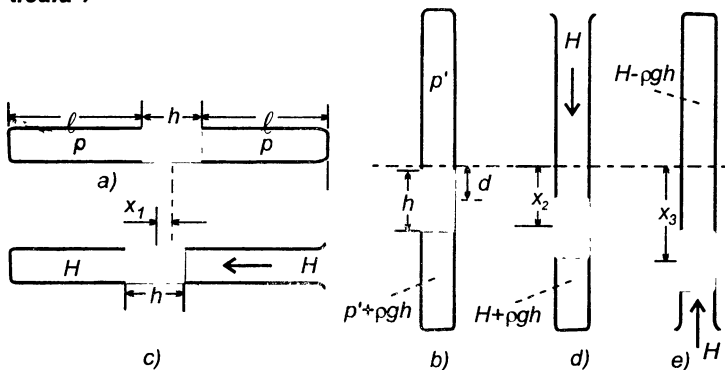


Fig.1.2.13

Rezolvare. Observăm că presiunea aerului din compartimentul inferior trebuie să echilibreze presiunea *hidrostatică* a coloanei de mercur ρgh plus presiunea aerului din compartimentul superior. Aerul din fiecare compartiment suferă transformări *izoterme* (la temperatura mediului ambiant)(secțiunea S a tubului se simplifică):

$$\rho \ell = p'(\ell + d) , \quad \rho \ell = (p' + \rho gh)(\ell - d) , \quad (1)$$

de unde rezultă prin eliminarea presiunii p' :

$$\rho = \rho gh (\ell^2 - d^2) / (2\ell d) = 96 \text{ kPa} < H = 100 \text{ kPa} . (2)$$

a) Dacă deschidem un capăt al tubului în poziție orizontală, mercurul se va retrage cu x_1 (deoarece $p < H$):

$$p \ell = H (\ell - x_1) \rightarrow x_1 = \ell (H - p) / H = 20 \text{ mm} . \quad (3)$$

b) Scriem direct ecuația transformării *izoterme* a aerului din compartimentul inferior din starea inițială în cea finală :

$$p \ell = (H + \rho gh) (\ell - x_2) \rightarrow$$

$$x_2 = \ell (H + \rho gh - p) / (H + \rho gh) = 15,7 \text{ cm} . \quad (4)$$

c) Scriem direct ecuația transformării *izoterme* a aerului din compartimentul superior din starea inițială în cea finală:

$$p \ell = (H - \rho gh) (\ell + x_3) \rightarrow$$

$$x_3 = \ell (p - H + \rho gh) / (H - \rho gh) = 30 \text{ cm} . \quad (5)$$

1.2.14. În camera barometrică a intrat puțin aer. Când barometrul arată presiunea $p_1 = 91 \text{ kPa}$, lungimea coloanei de aer din camera barometrică este $\ell_1 = 30 \text{ mm}$. Trăgând tubul în sus cu $h = 50 \text{ mm}$ barometrul arată acum $p_2 = 95 \text{ kPa}$ (gradațiile fiind pe o riglă fixă alăturată tubului). Aflați presiunea atmosferică .

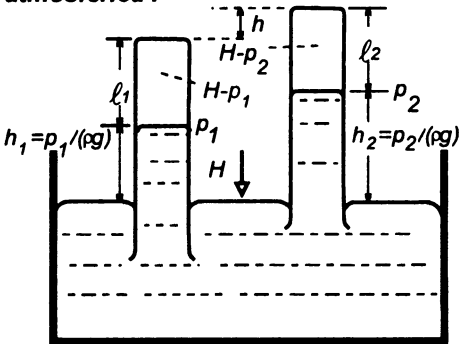


Fig.1.2.14

Rezolvare. Ceea ce citim pe scala barometrului reprezintă presiunea *hidrostatică* a coloanei respective de mercur, adică diferența dintre presiunea atmosferică și presiunea din camera barometrică, ceea ce coincide cu presiunea atmosferică, dacă în camera barometrică este *vid* ("vidul lui Torricelli"). Prin urmare, presiunea aerului din camera barometrică este $H - \rho gh_{1,2} = H - p_{1,2}$ și această masă de aer suferă o transformare *izotermă* (la temperatura mediului ambiant) atunci când tragem tubul în sus (secțiunea S se simplifică):

$$(H - p_1) l_1 = (H - p_2) l_2 . \quad (1)$$

Pe de altă parte, înălțimile coloanelor de mercur se obțin din citirile respective, după cum am spus ,

$$h_{1,2} = p_{1,2} / (\rho g) . \quad (2)$$

Atunci din geometria instalației rezultă :

$$h_1 + l_1 + h = h_2 + l_2 \text{ sau } p_1 / (\rho g) + l_1 + h = p_2 / (\rho g) + l_2 . \quad (3)$$

Scoatem l_2 din (3) și îl introducem în (1) :

$$\begin{aligned} H &= (p_2 l_2 - p_1 l_1) : (l_2 - l_1) = \\ &= p_2 + l_1 (p_2 - p_1) : [h - (p_2 - p_1) / (\rho g)] = 101 \text{ kPa} . \end{aligned} \quad (4)$$

1.2.15. Într-un tub barometric vertical coloana de mercur are lungimea $h = 40$ cm , iar coloana de aer $l = 19$ cm , presiunea atmosferică fiind normală. Cu cât trebuie cufundat tubul în vasul cu mercur pentru ca nivelul mercurului din tub să se egaleze cu nivelul mercurului din vas ?

Rezolvare. Masa de aer din camera barometrică suferă o transformare *izotermă* (la temperatura mediului ambiant). În primul caz presiunea atmosferică este echilibrată de presiunea hidrostatică a coloanei de mercur, ρgh , plus presiunea aerului din camera barometrică, deci presiunea acestuia este $H - \rho gh$. În al doilea caz presiunea aerului este chiar H , deoarece nu mai avem nici o denivelare. De asemenea, din geometria instalației rezultă lungimea coloanei de aer în al doilea caz.

$$(H - \rho gh) l = H(l + h - x) , \quad (1)$$

$$\text{de unde rezultă} \quad x = h (H + \rho g l) / H = 50 \text{ cm} . \quad (2)$$

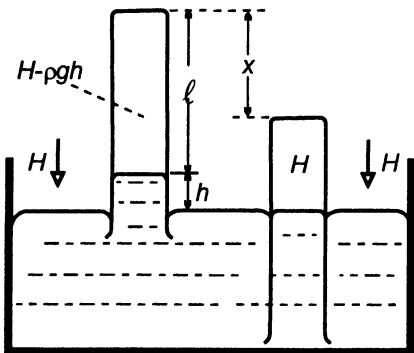


Fig.1.2.15

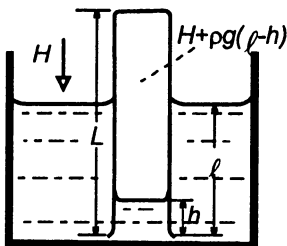


Fig.1.2.16

1.2.16. Un tub de lungime $L = 1,00$ m închis la capătul superior este cufundat, vertical, cu capătul inferior deschis, în apă pe o adâncime $\ell = 27$ cm. Presiunea atmosferică este normală. Aflați lungimea coloanei de apă care pătrunde în tub.

Rezolvare. În momentul atingerii suprafeței apei în tub se izolează o anumită masă de aer la presiunea atmosferică H și având volumul tubului LS . Această masă de aer suferă o transformare izotermă. Presiunea finală a aerului din tub trebuie să echilibreze presiunea hidrostatică a coloanei ($\ell - h$) de apă plus presiunea atmosferică : $(\ell - h)\rho g + H$. Legea **Boyle-Mariotte** dă (secțiunea S a tubului se simplifică) :

$$HL = [H + \rho g(\ell - h)](L - h), \quad (1)$$

de unde soluția :

$$h = (1/2) [\ell + L + H/(\rho g)] \pm (1/2) \{ [\ell + L + H/(\rho g)]^2 - 4\ell L \}^{1/2}. \quad (2)$$

Să facem câteva evaluări :

$$\ell + L + H/(\rho g) = 0,27 + 1 + 10,33 = 11,6 \text{ m},$$

$$[\ell + L + H/(\rho g)]^2 = 134,6 \text{ m}^2 \gg 4\ell L = 1,08 \text{ m}^2. \quad (3)$$

În acest caz radicalul se poate aproxima conform formulei (v. anexa cu formule de aproximație):

$$\sqrt{a+b} \approx \sqrt{a} \left(1 + \frac{b}{2a} \right) = \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}, \text{ dacă } |b| \ll a > 0. \quad (4)$$

În cazul nostru :

$$\begin{aligned} \{ [\ell + L + H/(\rho g)]^2 - 4\ell L \}^{1/2} &\approx \\ &\approx \ell + L + H/(\rho g) - 2\ell L : [\ell + L + H/(\rho g)]. \end{aligned} \quad (5)$$

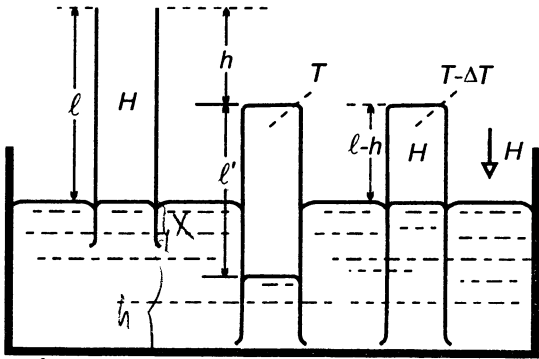
Atunci (2) devine

$$\begin{aligned} h &\approx (1/2) [\ell + L + H/(\rho g)] \pm \\ &\pm (1/2) \{ \ell + L + H/(\rho g) - 2\ell L : [\ell + L + H/(\rho g)] \} = \\ &= \ell + L + H/(\rho g) - \ell L : [\ell + L + H/(\rho g)] = 11,6 \text{ m} - 0,023 \text{ m}, \\ \text{respectiv } \ell L : [\ell + L + H/(\rho g)] &= 0,023 \text{ m} = 23 \text{ mm}. \end{aligned} \quad (6)$$

Prima soluție evident nu convine fiind $h > L$.

1.2.17. Într-un vas cu mercur se cufundă un tub deschis la ambele capete, lăsând afară o lungime $\ell = 60$ cm . Tubul se astupă cu degetul și se cufundă cu încă $h = 70$ mm . a) Ce lungime va avea coloana de aer, presiunea atmosferică fiind normală ? b) Cu câte grade trebuie răcit acum tubul pentru ca nivelul mercurului să se egaleze, temperatura inițială fiind $T = 300$ K ?

Fig.1.2.17



Rezolvare. a) În momentul astupării am izolat o masă de aer

la presiunea atmosferică și de volum ℓS , care suferă o transformare *izotermă*. În starea finală presiunea aerului din tub trebuie să echilibreze presiunea *hidrostatică* a stratului de mercur $\rho g(h + \ell')$ plus presiunea atmosferică H . **Legea Boyle-Mariotte** dă (secțiunea S a tubului se simplifică) :

$$H \ell = [H + \rho g(h + \ell' - \ell)] \ell', \quad (1)$$

$$\ell' = (1/2) [\ell - h - H / (\rho g)] \pm$$

$$\pm (1/2) \{ [\ell - h - H / (\rho g)]^2 + 4H\ell / (\rho g) \}^{1/2} = 57 \text{ cm} \quad (2)$$

(cealaltă soluție este negativă).

b) În starea finală presiunea revine la presiunea atmosferică H (nu avem denivelări), deci putem considera *direct* transformarea *izobară* din starea inițială în cea finală :

$$(T - \Delta T) : T = (\ell - h) : \ell, \quad \Delta T = T h / \ell = 35 \text{ K}. \quad (3)$$

1.2.18. Un tub cilindric închis la capătul superior este cufundat într-un vas cu mercur, astfel încât nivelul mercurului în tub și în vas este același, iar aerul ocupă o porțiune de lungime $\ell = 73 \text{ cm}$. Presiunea atmosferică este $H = 100 \text{ kPa}$. Tubul este tras în sus cu $d = 40 \text{ mm}$. a) La ce înălțime urcă mercurul în tub ? b) Cu câte grade trebuie încălzit tubul pentru ca nivelul mercurului să coboare la loc ? Temperatura inițială $T = 300 \text{ K}$.

Rezolvare. a) Presiunea atmosferică este echilibrată de presiunea *hidrostatică* ρgh a coloanei de mercur plus presiunea aerului din tub. În cazul problemei masa de aer închisă în tub are inițial presiunea egală cu cea atmosferică (nu avem denivelări), suferă o transformare *izotermă* (la temperatura mediului ambiant) și are în starea finală presiunea $H - \rho gh$ (secțiunea S a tubului se simplifică) :

$$H \ell = (H - \rho g h) (\ell + d - h), \quad (1)$$

$$h = (1/2) [\ell + d + H / (\rho g)] \pm$$

$$\pm (1/2) \{ [\ell + d + H / (\rho g)]^2 - 4Hd / (\rho g) \}^{1/2} = 2,0 \text{ cm} \quad (2)$$

(cealaltă soluție 100 cm, evident, nu convine problemei).

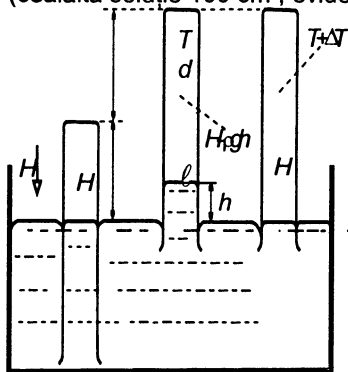


Fig.1.2.18

Ținând seama că $d = 2 \text{ cm} \ll H / (\rho g) = 75 \text{ cm}$, să facem următoarele transformări :

$$[\ell + d + H / (\rho g)]^2 - 4Hd / (\rho g) = [\ell + H / (\rho g)]^2 - d [2 H / (\rho g) - 2\ell - d] = (73 + 75)^2 - 2 (2 \cdot 75 - 2 \cdot 73 - 2) = 148^2 - 2^2 \text{ cm}^2. \quad (3)$$

În acest caz putem aproxima radicalul cu formula cunoscută :

$$\sqrt{a+b} \approx \sqrt{a} \left(1 + \frac{b}{2a} \right) = \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}, \text{ dacă } |b| \ll a > 0. \quad (4)$$

$$\text{În cazul nostru: } \{ [\ell + H / (\rho g)]^2 - d [2 H / (\rho g) - 2\ell - d] \}^{1/2} \approx \\ \approx \ell + H / (\rho g) - d [H / (\rho g) - \ell - d/2] : [\ell + H / (\rho g)]$$

și soluția (2) devine :

$$h \approx d [H / (\rho g) - d/4] : [H / (\rho g) + \ell] \approx \\ \approx d [H / (\rho g)] : [H / (\rho g) + \ell] = 2,03 \text{ cm}. \quad (5)$$

b) Față de starea inițială avem o transformare izobară, deci

$$(T + \Delta T) : T = (\ell + d) : \ell, \quad \Delta T = T d / \ell = 16,4 \text{ K}. \quad (6)$$

1.2.19. Un tub cilindric subțire de lungime $\ell = 1,00 \text{ m}$ deschis la ambele capete, este cufundat pe jumătate într-un vas cu mercur la presiunea atmosferică $H = 100 \text{ kPa}$. Tubul se închide la capătul superior și se scoate vertical din lichid. a) Care este lungimea coloanei de mercur rămase în tub ? b) Se răstoarnă tubul cu 180° . Cu cât coboară coloana de mercur? c) Se toarnă apă până la refuz. Cu cât coboară coloana de mercur ?

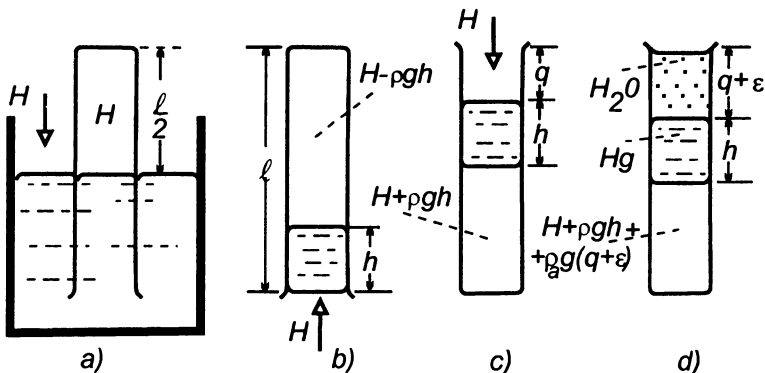


Fig.1.2.19

Rezolvare. După închiderea capătului superior avem o masă de aer care suferă un șir de transformări *izoterme* (la temperatura mediului ambiant).

$$a) H \ell / 2 = (H - \rho gh) (\ell - h), \quad (1)$$

$$h = (1/2) [\ell + H / (\rho gh)] - (1/2) \{ \ell^2 + H^2 / (\rho gh)^2 \}^{1/2} = 25 \text{ cm}, \quad (2)$$

unde $H / (\rho gh) = 75 \text{ cm}$.

b) Scriem transformarea *izotermă direct* din starea a în starea c :

$$H \ell / 2 = (H + \rho gh) (\ell - h - q) \rightarrow$$

$$q = \ell - h - [H / (\rho gh)] \cdot (\ell / 2) : [H / (\rho gh) + h] = 37,5 \text{ cm} \quad (3)$$

sau pentru transformarea b - c :

$$(H - \rho gh) (\ell - h) = (H + \rho gh) (\ell - h - q) \rightarrow$$

$$q = 2h (\ell - h) : [h + H / (\rho gh)] = 37,5 \text{ cm}. \quad (4)$$

c) Transformarea *izotermă c - d* se scrie :

$$(H + \rho gh) (\ell - h - q) = [H + \rho gh + \rho_a g(q + \varepsilon)] (\ell - h - q - \varepsilon). \quad (5)$$

Deoarece este de bănuț că ε este foarte *mic* față de q , putem neglija termenii pătratici în ε (de fapt în ε / q), fapt ce trebuie să se confirme prin rezultatul obținut (pentru a fi "autoconsistent"). Atunci (5) se simplifică și obținem :

$$\varepsilon \approx q (\ell - h - q) : [H / (\rho_a g) + h \rho / \rho_a + q - (\ell - h - q)] = 1,0 \text{ cm} \quad (6)$$

(se justifică ipoteza $\varepsilon \ll q$).

1.2.20. Într-un tub subțire vertical de lungime $\ell = 0,50 \text{ m}$ se află sus o coloană de mercur de lungime $h = 15 \text{ cm}$ care ajunge până la marginea superioară deschisă a tubului. Răsturnând ușor tubul cu deschiderea în jos, o parte din mercur

se scurge. Presiunea atmosferică este $H = 100 \text{ kPa}$. a) Care va fi lungimea coloanei de mercur rămase? La ce lungime a tubului mercurul s-ar scurge complet? b) Tubul este întors în poziția inițială. Cu cât coboară coloana de mercur? c) Se toarnă apă până la refuz. Cu cât coboară coloana de mercur? Cu câte grade trebuie încălzit tubul pentru ca toată apa să curgă afară? Temperatura inițială $t = 7,0^\circ\text{C}$.

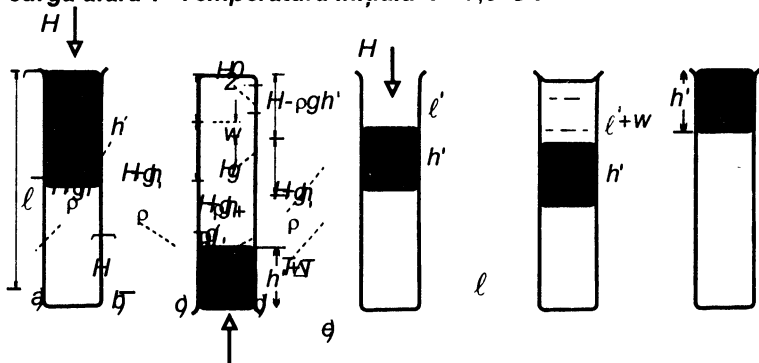


Fig.1.2.20

Rezolvare. Aerul închis în tub suferă o succesiune de transformări *izoterme* (la temperatura mediului ambiant), afară de ultima încălzire, care reprezintă o transformare *izobară* față de situația c.

a) Transformarea izotermă a - b :

$$(H + \rho gh)(l - h) = (H - \rho gh')(l - h'), \quad (1)$$

$$h' = (1/2)[l + H / (\rho g)] -$$

$$- (1/2)\{ [l + H / (\rho g)]^2 - 4h[h - l + H / (\rho g)] \}^{1/2} = 5,0 \text{ cm}. \quad (2)$$

Condiția $h' \rightarrow 0$ implică

$$l = h + H / (\rho g) = 90 \text{ cm}. \quad (3)$$

b) Transformarea izotermă b - c :

$$(H - \rho gh')(l - h') = (H + \rho gh')(l - h' - l'), \quad (4)$$

$$l' = 2h'(l - h') : [h' + H / (\rho g)] = 5,6 \text{ cm} \quad (5)$$

(unde $H / (\rho g) = 75 \text{ cm}$).

c) Transformarea izotermă c - d :

$$(H + \rho gh')(l - h' - l') =$$

$$= [H + \rho gh' + \rho_a g(l' + w)](l - h' - l' - w). \quad (6)$$

Deoarece este de așteptat ca $w \ll l'$, neglijăm în (6) termenii pătratici în w și atunci obținem :

$$w \approx l' (l - h' - l') : [H / (\rho_a g) + h' \rho / \rho_a + l' - (l - h' - l')] \approx \\ \approx l' (l - h' - l') : [H / (\rho_a g) + h' \rho / \rho_a + l'] = 2,0 \text{ cm}, \quad (7)$$

unde $H / (\rho_a g) = 10,2 \text{ cm}$, de aceea am neglijat termenul din paranteze de la numitor. Se verifică aproximativ $w \ll l'$.

De la c la e este o transformare izobară :

$$(T - \Delta T) : T = (l - h') : (l - h' - l'), \\ \Delta T = T l' : (l - h' - l') = 40 \text{ K}. \quad (8)$$

1.2.21. O eprubetă de masă $m = 50 \text{ g}$ și volum $V = 150 \text{ cm}^3$ este cufundată cu gura în jos în apă până la adâncimea $h = 10 \text{ cm}$. Ce forță trebuie aplicată pentru a menține eprubeta la această adâncime ? Presiunea atmosferică $H = 100 \text{ kPa}$.

Cât la sută din volumul eprubetei se umple cu apă ?

Rezolvare. Să evaluăm masa aerului din eprubetă .

Densitatea aerului în condiții obișnuite $\rho_{\text{aer}} = 1,29 \text{ kg/m}^3$, deci

$$m_{\text{aer}} = \rho_{\text{aer}} V \approx 0,2 \text{ g} \ll m = 50 \text{ g}, \quad (1)$$

de aceea greutatea aerului din eprubetă poate fi neglijată (în raport cu greutatea eprubetei).

Aerul închis în eprubetă suferă o transformare *izotermă* :

$$H l = [H + \rho g(h + l')] l'. \quad (2)$$

Pe de altă parte, condiția de echilibru mecanic :

$$F + mg = \rho V_{\text{dezl.}} g = \rho S l' g. \quad (3)$$

Din ecuația (2) avem

$$\rho g l' = (1/2)(-H - \rho g h) \pm (1/2)\{ (H + \rho g h)^2 + 4H l \}^{1/2}, \quad (4)$$

astfel încât forța cerută, din (3) :

$$F = S \rho g l' - mg = (1/2) S \rho g [-H / (\rho g) - h + \\ + \{ [H / (\rho g) + h]^2 + 4H l / (\rho g) \}^{1/2}] - mg. \quad (5)$$

Să facem unele evaluări și aproximații :

$$H / (\rho g) = 10,20 \text{ m} \gg l (\approx 0,2 \text{ m}), \quad l \approx 2 \text{ cm} = 7,5 \text{ cm} \approx \frac{2}{4} S \quad (6)$$

atunci radicalul se poate aproxima conform formulei cunoscute :

$$\sqrt{a+b} \approx \sqrt{a} \left(1 + \frac{b}{2a} \right) = \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}, \text{ dacă } |b| \ll a > 0. \quad (7)$$

În cazul nostru :

$$\{ [H / (\rho g) + h]^2 + 4H l / (\rho g) \}^{1/2} \approx \\ \approx H / (\rho g) + h + 2l [H / (\rho g)] : [H / (\rho g) + h], \quad (8)$$

atunci (5) devine

$$F = VH : [H / (\rho g) + h] - mg \approx \rho g V - mg = 1,0 \text{ N.} \quad (9)$$

din această expresie se vede că $l' \approx l$. În adevăr, aplicând aproximația (8) în (4) avem

$$l' \approx l H : (H + \rho g h) \approx l (1 - \rho g h / H),$$

$$(l - l') : l = h : [H / (\rho g)] < 1 \%. \quad (10)$$

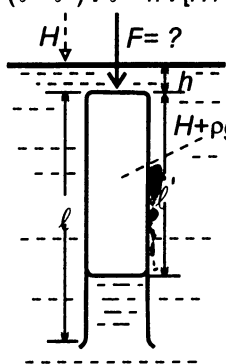


Fig.1.2.21

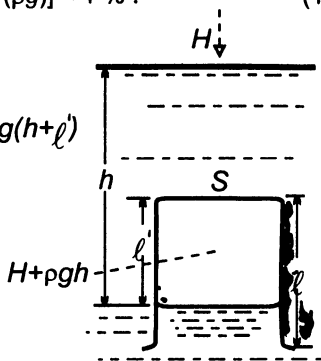


Fig.1.2.22

1.2.22. O căldare este cufundată în apă vertical cu gura în jos. Evaluați la ce adâncime ea se va scufunda singură.

Rezolvare. Aerul închis în căldare suferă o transformare izotermă (la temperatura apei):

$$H l = (H + \rho g h) l'. \quad (1)$$

Pe de altă parte, condiția de plutire este

$$mg = \rho V_{\text{dezl.}} g = \rho S l' g. \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă prin eliminarea lui l' :

$$h = [H / (\rho g)] [\rho S l - m] : m = [H / (\rho g)] [\rho V - m] : m. \quad (3)$$

Pentru evaluare luăm: $H \approx 100 \text{ kPa}$, atunci $H / (\rho g) \approx 10 \text{ m}$;
 $V = 10 \text{ L}$, $m = 1 \text{ kg}$. Rezultă $h \sim 90 \text{ m}$.

1.2.23. Un pahar cilindric de masă $m = 100 \text{ g}$ și secțiune $S = 30 \text{ cm}^2$ este cufundat cu gura în jos în apă. Punând pe fundul paharului un corp de masă $M = 200 \text{ g}$, fundul paharu-lui coboară până la nivelul apei din vas și paharul plutește.

Presiunea atmosferică $H = 100 \text{ kPa}$. Cât la sută din volumul paharului se umple cu apă? Care este înălțimea paharului?

Rezolvare. Aerul din pahar suferă o transformare izotermă. Inițial aerul era la presiunea atmosferică, iar final va avea presiunea atmosferică plus presiunea exercitată de pahar și de corpul M ,

prin greutatea lor : $H + (m + M)g / S$. Dacă fracțiunea din volumul paharului care se umple cu apă este f , atunci $f = (V - V') : V$.

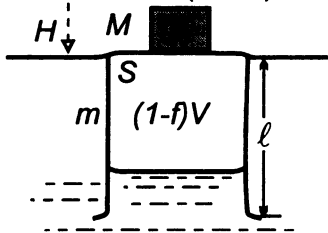


Fig.1.2.23

Legea **Boyle-Mariotte** se scrie astfel :

$$HV = [H + (m + M)g / S] \cdot (1 - f)V , \quad (1)$$

de unde rezultă

$$f = (m + M)g : [(m + M)g + HS] = 1,0 \% , \quad (2)$$

adică intră foarte puțină apă în interior.

Pe de altă parte, condiția de plutire este

$$(m + M)g = \rho V_{\text{dezl.}}g = \rho (1 - f)Vg ,$$

de unde

$$V = S \ell = (m + M) : [(1 - f) \rho S] \approx (m + M) : (\rho S) = 10 \text{ cm} . \quad (4)$$

1.2.24. În sistemul din figură $S_1 = 20 \text{ cm}^2$, $\ell_1 = 15 \text{ cm}$, S_2

$= 9,0 \text{ cm}^2$, $\ell_2 = 30 \text{ cm}$, **presiunea atmosferică** $H = 100 \text{ kPa}$. a)

Cu cât va coborî nivelul mercurului din tub, dacă introducem pistonul până la refuz în cilindru ? b) Care trebuie să fie aria S_1 minimă pentru ca aerul să înceapă să iasă din tub ?

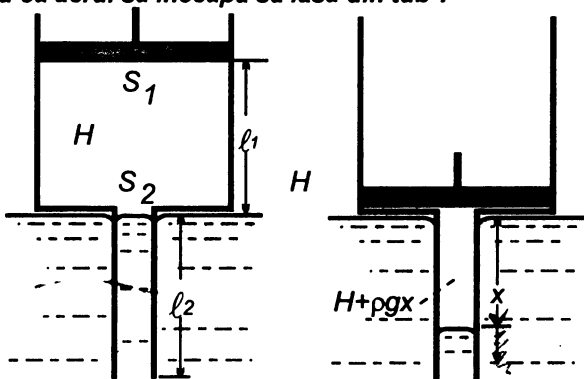


Fig.1.2.24

Rezolvare. a) Aerul închis sub piston suferă o transformare **izotermă**. Inițial are presiune atmosferică (nu avem denivelări), iar

final presiunea sa trebuie să echilibreze presiunea păturii ρgh plus presiunea atmosferică:

$$HS_1\ell_1 = (H + \rho gx)S_2x, \quad (1)$$

$$x = [1 / (2 \rho g)] \{ -H \pm [H^2 + 4H \rho g \ell_1 S_1 / S_2]^{1/2} \} = 25 \text{ cm} . \quad (2)$$

b) Punem condiția evidentă $x \rightarrow \ell_2$, atunci

$$HS_1\ell_1 = (H + \rho g\ell_2)S_2\ell_2, \quad (3)$$

$$S_1 = S_2(\ell_2 / \ell_1)(H + \rho g\ell_2) : H = 25,2 \text{ cm} . \quad (4)$$

1.2.25. Un tub în formă de U conține în ramura închisă o coloană de aer de lungime $\ell = 18 \text{ cm}$ la presiunea atmosferică $H = 100 \text{ kPa}$. Cât devine coloana de aer dacă turnăm mercur până la refuz în ramura deschisă ? Ce masă de mercur s-a turnat dacă secțiunea tubului $S = 1,00 \text{ cm}^2$?

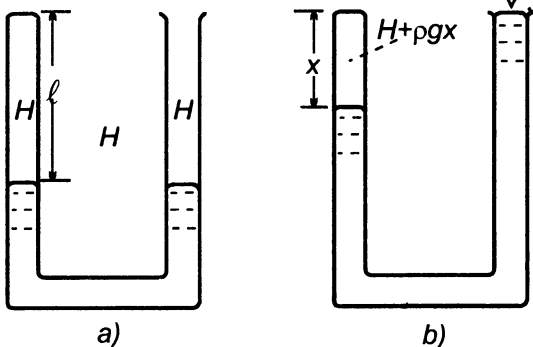


Fig.1.2.25

Rezolvare. Aerul închis în ramura închisă suferă o transformare izotermă :

$$H \ell S = (H + \rho gx) x S, \quad (1)$$

$$x = [1 / (2 \rho g)] \{ -H \pm [H^2 + 4H \rho g \ell]^{1/2} \} = 15 \text{ cm} . \quad (2)$$

Masa de mercur turnată :

$$m = \rho S(\ell + \ell - x) = 286 \text{ g} . \quad (3)$$

1.2.26. În dispozitivul din figură $h = 10 \text{ cm}$. Deschizând robinetul, o parte din mercur curge și în ramura închisă nivelul mercurului coboară cu $h' = 9,0 \text{ cm}$. Cu cât coboară nivelul mercurului în ramura deschisă ? Presiunea atmosferică este normală.

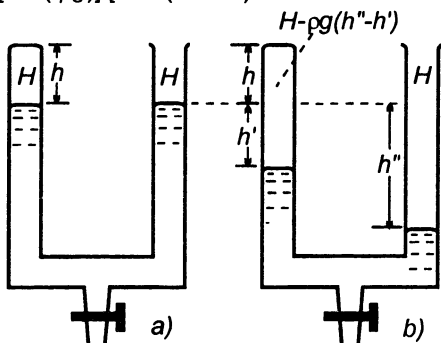
Rezolvare. Aerul închis în ramura închisă suferă o transformare izotermă (secțiunea S a tubului se simplifică) :

$$H h = [H - \rho g(h'' - h')] (h + h'), \quad (1)$$

în al doilea caz presiunea atmosferică echilibrează presiunea hidrostatică $\rho g(h'' - h')$ plus presiunea aerului închis. Din (1) rezultă:

$$h'' = h' + [H / (\rho g)] [h' : (h + h')] = 45 \text{ cm}. \quad (2)$$

Fig.1.2.26



1.2.27. Un cilindru de masă $M = 100 \text{ kg}$, închis cu un piston de masă $m = 20 \text{ kg}$ și arie $S = 0,200 \text{ m}^2$, conține aer, inițial la presiunea atmosferică $p_0 = 100 \text{ kPa}$ și volum $V_0 = 0,200 \text{ m}^3$. Cilindrul este cufundat în apă și pistonul ancorat cu un lanț în care tensiunea este $F = 300 \text{ N}$. Aflați adâncimea la care se află pistonul.

Rezolvare. Aerul închis în cilindru suferă o transformare izotermă :

$$p_0 V_0 = p S h. \quad (1)$$

Condiția de echilibru mecanic a pistonului :

$$(p_0 + \rho g x) S = mg + F + p S. \quad (2)$$

Condiția de echilibru mecanic a cilindrului :

$$p S = Mg + [p_0 + \rho g (x - h)] S. \quad (3)$$

Din aceste 3 ecuații trebuie să eliminăm pe p și h . Scoatem pe $p S$ din (2) și îl introducem în (1) și (3) :

$$p_0 V_0 = h [(p_0 + \rho g x) S - mg - F], \quad (4)$$

$$(p_0 + \rho g x) S - mg - F = Mg + [p_0 + \rho g (x - h)] S \quad (5)$$

sau $- mg - F = Mg - \rho g h S \quad (6)$

(ultima relație s-ar putea scrie și direct).

Scoatem h din ultima relație și îl introducem în (4) :

$$p_0 V_0 = [(Mg + mg + F) / (\rho g S)] [(p_0 + \rho g x) S - mg - F], \quad (7)$$

de unde rezultă în sfârșit x :

$$x = p_0 V_0 : [(M + m)g + F] + [mg + F - p_0 S] : (\rho g S) = 3,6 \text{ m}. \quad (8)$$

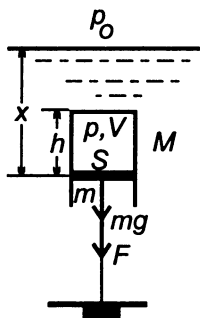


Fig.1.2.27

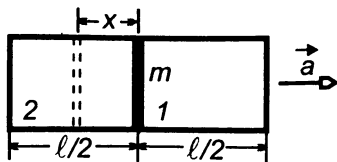


Fig.1.2.28

1.2.28. Un vas cilindric închis de volum $V = 5,0$ L și lungime $\ell = 1,00$ m, așezat orizontal, este împărțit în două compartimente egale cu ajutorul unui piston mobil, etanș, fără frecări, de masă $m = 2,00$ kg. Presiunea în fiecare compartiment este $p = 100$ kPa. Cu cât se va deplasa pistonul (la echilibru) dacă vasul este tras orizontal cu accelerația $a = g$?

Rezolvare. În starea de echilibru relativ pistonul va avea accelerația \vec{a} , deci conform principiului *fundamental* al mecanicii (*lex secunda*) asupra lui trebuie să acționeze o forță rezultantă $m\vec{a}$. Această forță se naște din diferența de presiune dintre compartimente :

$$F = (p_2 - p_1) S = ma . \quad (1)$$

Dar aerul din fiecare compartiment suferă o transformare *izotermă*:

$$pV/2 = p_1(V/2 + Sx) , \quad pV/2 = p_2(V/2 - Sx). \quad (2)$$

Scoatem $p_{1,2}$ din (2) și introducem în (1). Obținem ecuația de gradul doi :

$$x^2 + x \cdot pV / (ma) - V^2 / (4S^2) = 0 , \quad (3)$$

$$x = -pV / (2ma) \pm \{ [pV / (2ma)]^2 + \ell^2 / 4 \}^{1/2} = \\ = [pV / (2ma)] [-1 \pm \{ 1 + [mal / (pV)]^2 \}^{1/2}] .$$

Deoarece $mal = 19,6$ J \ll $pV = 500$ J, radicalul poate fi aproximat conform formulei cunoscute:

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} , \text{ dacă } |x| \ll 1 . \quad (5)$$

În cazul nostru :

$$x \approx [pV / (2ma)] (1/2) [mal / (pV)]^2 = mal^2 : (4pV) = 1,0 \text{ cm} . \quad (6)$$

1.2.29. Într-un vas se află gaz închis cu un piston de masă $m = 9,2$ kg și secțiune $S = 98$ cm² care se poate mișca etanș fără frecări. Mișcând vasul cu accelerația $a = ng$, $n = 4,0$, în

jos, volumul gazului a crescut de $k = 1,5$ ori la temperatura constantă (în mișcare staționară). Aflați presiunea atmosferică.

Rezolvare. Gazul suferă o transformare *izotermă*. Inițial, pe lângă presiunea atmosferică H , mai acționează și presiunea corespunzătoare greutății pistonului, mg / S . În starea finală *staționară* pistonul are accelerația a imprimată de forța rezultantă:

$$(H + mg / S - p')S = ma . \quad (1)$$

Legea transformării *izoterme* se scrie :

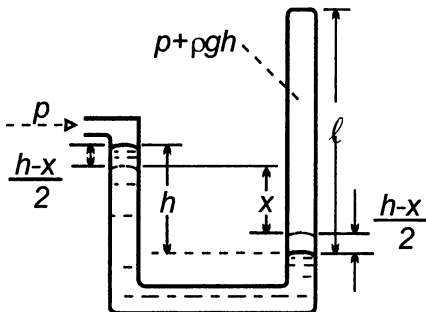
$$(H + mg / S) V = p' V' = [H + m(g - a) / S] \cdot kV , \quad (2)$$

de unde rezultă :

$$H = (mg / S) (nk - k + 1) : (k - 1) = 101,2 \text{ kPa} . \quad (3)$$

1.2.30. Presiunea din cabina unei navete spațiale este măsurată cu manometrul din figură , care conține aer în ramura închisă, astfel încât în repaus, la presiunea $p = 98,7 \text{ kPa}$ din cabină denivelarea este $h = 40 \text{ mm}$ și lungimea coloanei de aer $\ell = 20 \text{ cm}$. Care va fi denivelarea la pornirea verticală a navetei cu accelerația $a = g$?

Fig.1.2.30



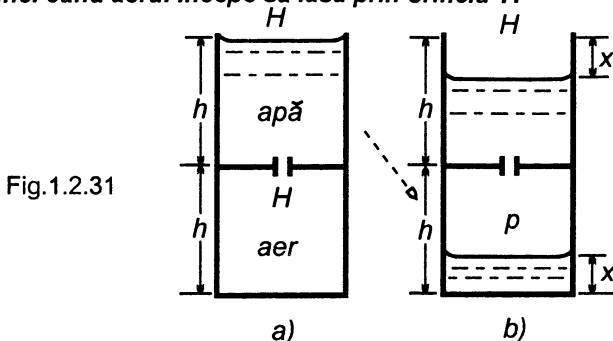
Rezolvare. Observăm că într-un sistem de referință *neinerțial*, în *tranzlație neuniformă* față de stele și nebuloase îndepărtate, totul se petrece ca și cum sistemul de referință ar fi inerțial, dar apare un câmp gravitațional *echivalent* $\vec{g}_{ech} = -\vec{a}$ care se adaugă la câmpul gravitațional existent. În cazul nostru : $g' = g - (-a) = g + a$. Observăm mai departe, că într-un tub cu aceeași secțiune peste tot, cu cât urcă lichidul într-o ramură, exact cu atât coboară în cealaltă ramură (lichid incompresibil).

Aerul din ramura închisă suferă o transformare *izotermă* :

$$(p + \rho gh) \ell S = [p + \rho(g + a)x] [\ell - (h - x) / 2] S . \quad (1)$$

Aceasta este o ecuație de gradul doi în x , a cărei soluție acceptabilă pentru problema noastră este $x = 3,0 \text{ cm}$.

1.2.31. Într-un vas cilindric de înălțime $2h = 1,00$ m se află inițial jumătate apă și jumătate aer la presiunea atmosferică $H = 100$ kPa, separate printr-un perete în care este un mic orificiu. Ce grosime va avea stratul de apă în jumătatea inferioară atunci când aerul începe să iasă prin orificiu ?



Rezolvare. Pentru ca aerul să înceapă să iasă prin orificiu trebuie ca presiunea sa să egaleze presiunea hidrostatică a păturii de apă $\rho g(h - x)$ plus presiunea atmosferică H :

$$p = H + \rho g(h - x) . \quad (1)$$

Pe de altă parte, până în acest moment aerul închis în jumătatea inferioară suferă o transformare *izotermă* (secțiunea S a vasului se simplifică):

$$Hh = p(h - x) = [H + \rho g(h - x)] (h - x)$$

$$\text{sau} \quad (h - x)^2 + (h - x) H / (\rho g) - hH / (\rho g) = 0 . \quad (2)$$

Din această ecuație de gradul doi rezultă :

$$x = h + [H / (2 \rho g)] [1 - \{1 + 4 \rho gh / H\}^{1/2}] = 2,24 \text{ cm} . \quad (3)$$

Deoarece $H / (\rho g) = 10,2$ m și $h = 0,50$ m , putem aproxima radicalul cu ajutorul formulei cunoscute

$$(1 + x)^r \approx 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!} x^2 + \dots , \text{ dacă } |x| \ll 1 . \quad (4)$$

În cazul nostru $x = 4 \rho gh / H$ și $r = 1/2$:

$$\{1 + 4 \rho gh / H\}^{1/2} \approx 1 + 2 \rho gh / H - 2(\rho gh / H)^2 + \dots \quad (5)$$

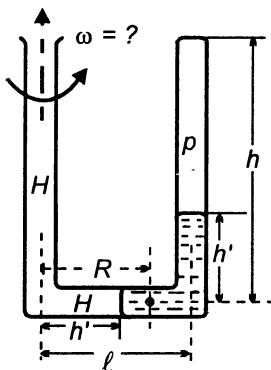
Dacă păstrăm *prima* aproximație, de ordinul I, efectul "dispare" :

$x \rightarrow 0$, deaceea păstrăm și aproximația următoare, de ordinul II, atunci :

$$x \approx h \cdot \rho gh / H = h \cdot h : [H / (\rho g)] = 2,45 \text{ cm} . \quad (6)$$

1.2.32. În dispozitivul din figură : $\ell = 24 \text{ cm}$, $h = 20 \text{ cm}$. Inițial mercurul umple ramura orizontală, iar în ramura închisă este aer și presiunea atmosferică este normală. Cu ce turație trebuie învârtit dispozitivul pentru ca mercurul să urce cu $h' = 16 \text{ cm}$?

Fig.1.2.32



Rezolvare. Aerul din ramura închisă suferă o transformare izotermă. Inițial are presiunea egală cu cea atmosferică și volumul Sh :

$$Hh = p(h - h') . \quad (1)$$

Pe de altă parte porțiunea de mercur rămasă în ramura orizontală ($\ell - h'$) are o mișcare circulară sub acțiunea forței centripete dată de diferența de presiune :

$$F = (p + \rho gh') - H = ma_{\text{CM}} = m \omega^2 R , \quad (2)$$

unde $m = \rho (\ell - h') S$, $R = (h' + \ell) / 2$. (3)

Scoatem p din (1) și îl introducem în (2), ținând seama de (3) :

$$Hh / (h - h') + \rho gh' - H = \rho (\ell - h') S \omega^2 (\ell + h') / 2 , \quad (4)$$

de unde rezultă

$$n^2 = \omega^2 / (4 \pi^2) = [1 / (4 \pi^2)] 2 gh' [h - h' + H / (\rho g)] : \\ : [(h - h')(\ell^2 - h'^2)] = 49 \text{ rot}^2/\text{s}^2 , \quad n = 7,0 \text{ rot/s} . \quad (5)$$

1.2.33. La mijlocul unui tub de lungime $2\ell = 1,00 \text{ m}$, închis la capete, se află un piston subțire de masă $m = 0,40 \text{ kg}$ și arie $S = 10 \text{ cm}^2$, care se poate deplasa etanș fără frecări. În stânga și dreapta pistonului se află gaz la presiunea $p = 100 \text{ kPa}$. Tubul este adus în rotație într-un plan orizontal în jurul unei axe verticale care trece prin mijlocul tubului. Temperatura este menținută constantă. Aflați viteza unghiulară dacă pistonul s-a deplasat cu distanța $x = 30 \text{ mm}$.

Rezolvare. Poziția *centrală* a pistonului este *instabilă*. La cea mai mică trepidație el se va deplasa în poziția de echilibru (relativ) stabil, ca în figură, efectuând deci o mișcare circulară uniformă sub acțiunea unei forțe *centripete* dată de diferența presiunilor:

$$F = (p_2 - p_1) S = ma = m \omega^2 x. \quad (1)$$

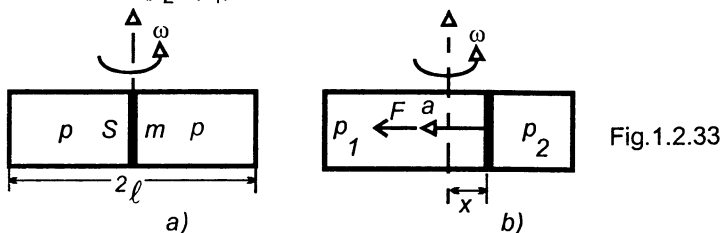


Fig.1.2.33

Pe de altă parte, aerul din fiecare compartiment suferă o transformare *izotermă*:

$$p \ell = p_2(\ell - x), \quad p \ell = p_1(\ell + x). \quad (2)$$

Din (2) scoatem $p_{1,2}$ și le introducem în (1):

$$p \ell [1 / (\ell - x) - 1 / (\ell + x)] S = m \omega^2 x,$$

$$\omega^2 = 2p\ell S : [m(\ell^2 - x^2)] = 625 \text{ rad}^2/\text{s}^2, \quad \omega = 25 \text{ rad/s}. \quad (3)$$

1.2.34. Într-un tub orizontal de lungime $\ell = 80 \text{ cm}$, închis la un capăt, se află în echilibru o picătură de mercur de lungime $h = 3,0 \text{ mm}$, la distanța $d = 64 \text{ cm}$ de capătul închis. Presiunea atmosferică $H = 100 \text{ kPa}$, densitatea mercurului $\rho = 13,6 \text{ g/cm}^3$. La ce viteză unghiulară în jurul unei axe verticale trecând prin capătul închis, picătura de mercur iese din tub ?

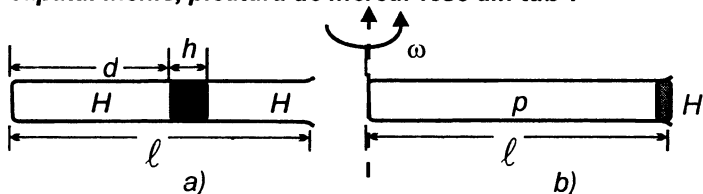


Fig.1.2.34

Rezolvare. Aerul din tub suferă o transformare *izotermă*, având inițial presiunea H :

$$H d = p \ell, \quad (h = 3 \text{ mm} \ll \ell = 800 \text{ mm}). \quad (1)$$

Pe de altă parte, picătura de mercur are o mișcare *circulară* sub acțiunea forței *centripete*, dată de *diferența* de presiune:

$$F = (H - p) S = ma = \rho h S \cdot \omega^2 \ell. \quad (2)$$

Eliminăm p din (1), (2) și obținem

$$\omega^2 = H(1 - d/l) : (\rho h l) = 625 \text{ rad}^2/\text{s}^2, \quad \omega = 25 \text{ rad/s}. \quad (3)$$

1.2.35. În sistemul din figură se dau $p_0 = 100 \text{ kPa}$, $S_1 = 100 \text{ cm}^2$, $S_2 = 400 \text{ cm}^2$, $V = 6,0 \text{ L}$ - **volumul inițial total al gazului. Cu cât se deplasează pistoanele (cuplate rigid între ele), dacă presiunea exterioară crește până la** $p = 200 \text{ kPa}$?

Rezolvare. Să scriem condiția de echilibru mecanic a sistemului format de cele două pistoane cuplate rigid :

$$pS_1 + p^*S_2 = pS_2 + p^*S_1 \rightarrow (p - p^*)S_1 = (p - p^*)S_2, \quad (1)$$

deoarece $S_1 \neq S_2$, rezultă de aici $p = p^*$, adică presiunea aerului din cilindri trebuie să fie permanent egală cu presiunea exterioară !

Aerul din cilindri suferă o transformare *izotermă* :

$$p_0V = p(V + xS_1 - xS_2), \quad (2)$$

$$x = [V : (S_2 - S_1)] [(p - p_0) : p] = 10 \text{ cm}. \quad (3)$$

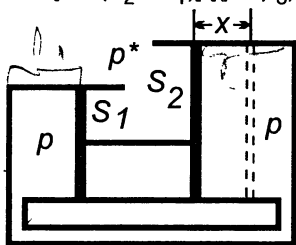


Fig.1.2.35

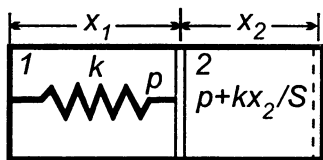


Fig.1.2.36

1.2.36. Într-un cilindru orizontal vidat stă în echilibru lângă un capac un piston (care se poate mișca etanș fără frecări) prins printr-un resort orizontal de celălalt capac. Se introduc mase egale din același gaz de o parte și de alta a pistonului. Aflați raportul volumelor de gaz, știind că prin vidarea compartimentului cu resort, volumul celălalt crește de $n = 2,0$ ori.

Rezolvare. Fiind mase egale din același gaz, la aceeași temperatură, putem scrie *legea Boyle-Mariotte* pentru stările 1 - 2 ($pV = (m/\mu)RT$) :

$$px_1S = (p + kx_2/S)x_2S, \quad (1)$$

unde am ținut seama de presiunea suplimentară exercitată de resort kx_2/S . Pe de altă parte, prin vidarea compartimentului cu resort, gazul din celălalt compartiment suferă în continuare o transformare *izotermă* :

$$(p + kx_2/S)x_2S = (k nx_2/S) nx_2S . \quad (2)$$

Din ultima relație scoatem presiunea p pe care o introducem în (1):

$$p = (kx_2/S) (n^2 - 1) , \quad (n^2 - 1)x_1 = n^2 x_2 ,$$

$$V_1 / V_2 = x_1 / x_2 = n^2 / (n^2 - 1) = 4 / 3 . \quad (3)$$

*

1.3. Transformarea generală

1.3.1. Un vas cilindric este împărțit cu ajutorul unui piston termoizolant, care se poate mișca etanș fără frecări, în două compartimente de lungime $l_1 = 20$ cm, $l_2 = 40$ cm, conținând gaze la presiunile $p_1 = 300$ kPa, $p_2 = 100$ kPa și la aceeași temperatură, ca în figură. Cu cât se va deplasa pistonul dacă îl lășăm liber și încălzim gazele până la temperatura $T_1 = 400$ K, respectiv $T_2 = 300$ K ?

Rezolvare. Gazul din fiecare compartiment suferă o transformare *generală* (masa $m = \text{const}$). În starea finală de echilibru de o parte și de alta a pistonului trebuie să fie aceeași presiune p' :

$$p_1 l_1 S / T = p' (l_1 + x) S / T_1, \quad p_2 l_2 S / T = p' (l_2 - x) S / T_2. \quad (1)$$

Împărțind membru la membru ecuațiile, găsim

$$x = l_1 l_2 (p_1 T_1 - p_2 T_2) : (p_1 l_1 T_1 + p_2 l_2 T_2) = 20 \text{ cm}. \quad (2)$$

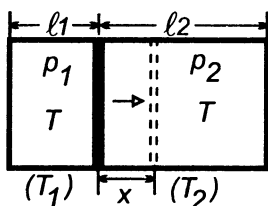


Fig.1.3.1

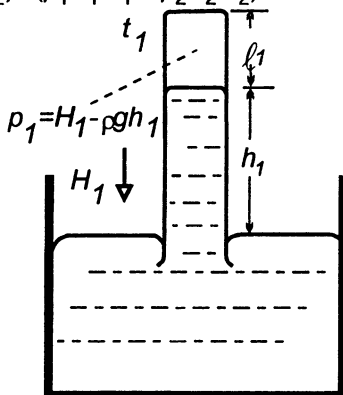


Fig.1.3.2

1.3.2. Camera unui barometru conține puțin aer. Într-o zi, când temperatura este $t_1 = 17^\circ\text{C}$ și presiunea atmosferică normală, coloana de mercur are înălțimea $h_1 = 710$ mm și lungimea coloanei de aer $l_1 = 29$ cm. În altă zi coloana de mercur

este $h_2 = 700 \text{ mm}$, temperatura fiind $t_2 = 27^\circ\text{C}$. Care este presiunea atmosferică în ultimul caz ?

Rezolvare. Aerul din camera barometrică suferă o transformare *generală*. Presiunea atmosferică H este echilibrată de presiunea *hidrostatică* a coloanei de mercur ρgh la care se adaugă presiunea aerului din camera barometrică : $H = \rho gh + p$. Legea transformării *generale* dă :

$$(H_1 - \rho gh_1) \ell_1 S / T_1 = (H_2 - \rho gh_2) \ell_2 S / T_2 , \quad (1)$$

dar $h_1 + \ell_1 = h_2 + \ell_2$, atunci rezultă :

$$H_2 = \rho gh_2 + (H_1 - \rho gh_1) (T_2 / T_1) [\ell_1 / (\ell_1 + h_1 - h_2)] = 100 \text{ kPa} . \quad (2)$$

1.3.3. O eprubetă de lungime $L = 28 \text{ cm}$ este cufundată cu gura în jos în mercur, astfel încât lungimea eprubetei rămasă afară este $\ell = 25 \text{ cm}$. La temperatura $t = 27^\circ\text{C}$ în eprubetă a pătruns o coloană de mercur de lungime $h = 5,0 \text{ cm}$. Până la ce temperatură trebuie încălzită eprubeta pentru ca aerul să înceapă să iasă din ea? Presiunea atmosferică este $H = 100 \text{ kPa}$.

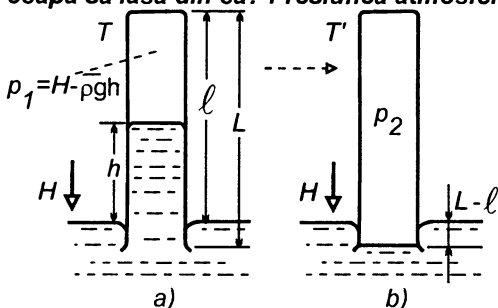


Fig.1.3.3

Rezolvare. Aerul din eprubetă suferă o transformare *generală*. Inițial presiunea atmosferică este echilibrată de presiunea hidrostatică a coloanei de mercur , ρgh , plus presiunea gazului din eprubetă : $H = \rho gh + p_1$. În starea finală presiunea p_2 din eprubetă echilibrează presiunea hidrostatică a părții de mercur $\rho g(L - \ell)$ plus presiunea atmosferică : $p_2 = \rho g(L - \ell) + H$. Prin urmare,

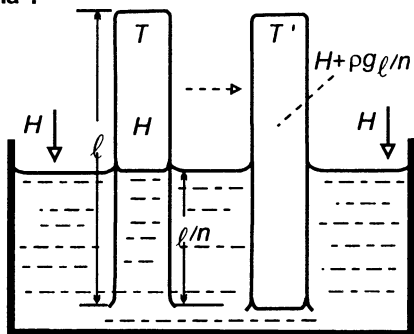
$$(H - \rho gh) (\ell - h) S / T = [H + \rho g(L - \ell)] LS / T' , \quad (1)$$

$$T' = T [L / (\ell - h)] [H / (\rho g) + L - \ell] : [H / (\rho g) - h] = 468 \text{ K} = 195^\circ\text{C} , \text{ unde } H / (\rho g) = 750 \text{ mm} . \quad (2)$$

1.3.4. O eprubetă de lungime $\ell = 20 \text{ cm}$ este cufundată cu gura în jos în apă, astfel încât nivelul apei este același în vas și

eprubetă, și în apă se află a $n = 10$ - a parte din lungimea eprubetei. Cu câte grade trebuie încălzită eprubeta pentru ca să iasă aer din ea, temperatura inițială fiind $t = 27^\circ\text{C}$ și presiunea atmosferică normală ?

Fig.1.3.4



Rezolvare. Aerul din eprubetă suferă o transformare generală:

$$H(l - l/n)S/T = (H + \rho g l/n) l S/(T + \Delta T), \quad (1)$$

$$\Delta T = T(H + \rho g l) : [H(n - 1)] = T[H/(\rho g) + l] :$$

$$: [(n - 1)H/(\rho g)] = 34 \text{ K, unde } H/(\rho g) = 10,332 \text{ m.} \quad (2)$$

1.3.5. Un tub cilindric de lungime $l = 30$ cm, închis la un capăt, este cufundat complet, cu capătul deschis în apă. Temperatura aerului $t = 27^\circ\text{C}$ este cu $\Delta T = 10$ K mai mare decât temperatura apei. Ce lungime va avea coloana de apă care a intrat în tub după ce aerul din eprubetă ia temperatura apei ?

Rezolvare. Aerul din eprubetă suferă o transformare generală. Inițial presiunea este egală cu cea atmosferică, iar final presiunea din tub trebuie să echilibreze presiunea stratului de apă $\rho g(\ell - h)$ plus presiunea atmosferică :

$$H l / T = [H + \rho g(\ell - h)] (\ell - h) / (T - \Delta T), \quad (1)$$

$$h = H/(2 \rho g) + \ell \pm [H/(2 \rho g)] \{1 + 4\{\ell : [H/(\rho g)]\}(T - \Delta T) / T\}^{1/2}. \quad (2)$$

Deoarece $H/(\rho g) \approx 10 \text{ m} \gg \ell = 0,3 \text{ m}$, putem aproxima radicalul conform formulei cunoscute :

$$(1 + x)^{1/2} \approx 1 + x/2, \text{ dacă } |x| \ll 1. \quad (3)$$

În cazul nostru :

$$h \approx H/(2 \rho g) + \ell \pm [H/(2 \rho g)] \{1 + 2\{\ell : [H/(\rho g)]\}(T - \Delta T) / T\} = \ell \Delta T / T = 1,0 \text{ cm,} \quad (4)$$

cealaltă soluție nefiind acceptabilă pentru problemă ($h \gg 2\ell$).

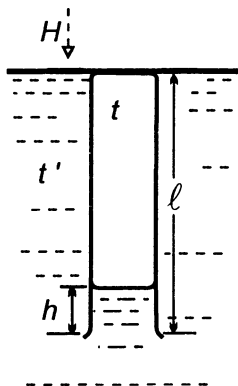


Fig.1.3.5

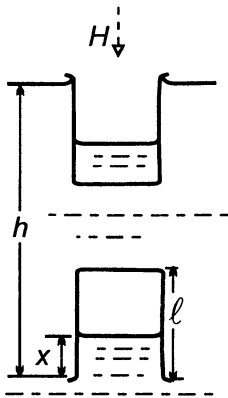


Fig.1.3.6

1.3.6. Un pahar cilindric de lungime $\ell = 10$ cm plutește în apă cu marginile (gura) chiar la nivelul apei, dacă este umplut cu $f = 3/4$ cu apă. Același pahar conținând aer încălzit la temperatura $t_1 = 127^\circ\text{C}$ este cufundat cu gura în jos în apă care are temperatura $t_2 = 27^\circ\text{C}$. Presiunea atmosferică este $H = 100$ kPa. La ce adâncime paharul va fi până la urmă în suspensie ?

Rezolvare. În cele două cazuri avem condiția de plutire (m - masa paharului):

$$mg = \rho S \ell (1 - f) g, \quad mg = \rho S (\ell - x) g \rightarrow x = f \ell, \quad (2)$$

ceea ce era de așteptat.

În al doilea caz aerul suferă o transformare generală :

$$H \ell / T_1 = [H + \rho g (h - x)] (\ell - x) / T_2 = [H + \rho g (h - f \ell)] \ell (1 - f) / T_2, \quad (3)$$

$$h = f \ell + [H / (\rho g)] \{ T_2 : [T_1 (1 - f)] - 1 \} = 20,7 \text{ cm}, \quad (4)$$

unde $H / (\rho g) = 10, 20$ m.

1.3.7. O eprubetă conținând gaz este cufundată cu capătul deschis într-un lichid de densitate $\rho = 1033 \text{ kg/m}^3$, astfel încât la temperatura $t = 30^\circ\text{C}$ și presiunea atmosferică normală, denivelarea lichidului este zero și lungimea coloanei de gaz $\ell = 30$ cm. a) Până la ce temperatură trebuie răcită eprubeta cu gaz pentru ca volumul de gaz să scadă la $f = 90\%$ din valoarea inițială ? b) Dacă cufundăm complet eprubeta, cu cât se reduce lungimea coloanei de aer la cele două temperaturi ?

Rezolvare. a) În acest caz aerul suferă o transformare generală :

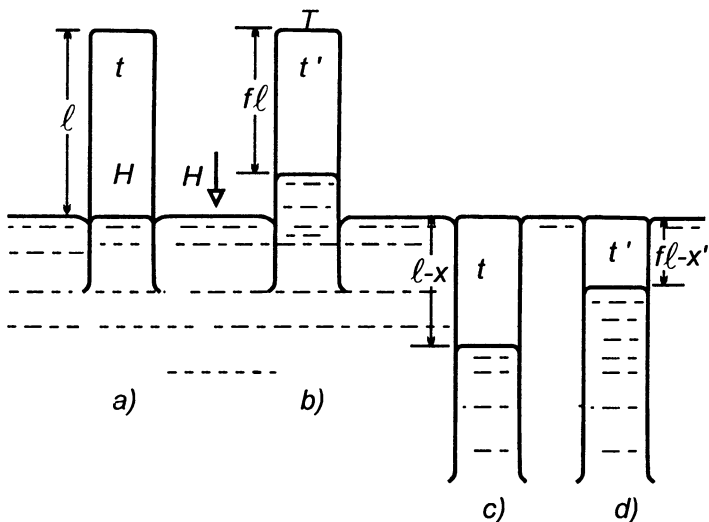


Fig.1.3.7

$$H l / T = [H - \rho g(l - f l)] f l / T' , \quad (1)$$

$$T' = f T [H - \rho g(1 - f) l] / H \approx f T = 273 \text{ K} = 0^\circ\text{C} . \quad (2)$$

b) De la a la c gazul suferă o transformare *izotermă* :

$$H l = [H + \rho g(l - x)] (l - x) . \quad (3)$$

Deoarece $x \ll l$, putem neglija termenii pătratici în x ($x / l \ll 1$) și obținem :

$$x \approx l : [2 + H / (\rho g l)] \approx l \rho g l / H = 9,0 \text{ mm} . \quad (4)$$

c) De la b la d avem iarăși o transformare *izotermă* :

$$[H - \rho g(1 - f) l] f l = [H + \rho g(f l - x')] (f l - x') . \quad (5)$$

Deoarece $x' \ll f l$, putem neglija termenii pătratici în x' și obținem

$$x' \approx f l : [2f + H / (\rho g l)] \approx f l \cdot \rho g l / H = 8,0 \text{ mm} . \quad (6)$$

1.3.8. Un tub îndoit în formă de U are la capătul închis o masă de aer. La temperatura $t_1 = 17^\circ\text{C}$ și presiunea atmosferică

$H_1 = 102,66 \text{ kPa}$ aerul ocupă lungimea $l_1 = 29 \text{ cm}$ și denivelarea mercurului este $h_1 = 10 \text{ mm}$, ca în figură. Într-o altă zi denivelarea a devenit $h_2 = 30 \text{ mm}$ la temperatura $t_2 = 27^\circ\text{C}$. a) Care este presiunea atmosferică H ? b) Care va fi denivelarea în condițiile normale de temperatură și presiune ? c) Pentru ce temperatură (la presiunea atmosferică normală) denivelarea se anulează ?

Rezolvare. Aerul închis suferă o transformare *generală*. Presiunea aerului închis echilibrează presiunea *hidrostatică* a coloanei de mercur ρgh plus presiunea atmosferică : $p = \rho gh + H$. De asemenea, observăm că, - secțiunea tubului fiind aceeași, - cu cât mercurul coboară într-o ramură cu atât urcă în cealaltă.

$$a) (H_1 + \rho gh_1) \ell_1 / T_1 = (H_2 + \rho gh_2) [\ell_1 + (h_2 - h_1) / 2] / T_2, (1)$$

$$H_2 = (H_1 + \rho gh_1)(T_2 / T_1) \ell_1 : [\ell_1 + (h_2 - h_1) / 2] - \rho gh_2 = 100,0 \text{ kPa}. (2)$$

b) Punem în (1) condiția $H_2 = p_2 = 101,32 \text{ kPa}$ și $T_2 = T_0 = 273 \text{ K}$. Rezultă o ecuație de gradul doi în h_2 :

$$h_2' = (1/2) [- p_0 / (\rho g) - 2\ell_1 + h_1] \pm \pm (1/2) \{ [p_0 / (\rho g) - 2\ell_1 + h_1]^2 + 8 [H_1 / (\rho g) + h_1] \ell_1 T_0 / T_1 \}^{1/2} = = (1/2) (- 133,0 \pm 131,9) \text{ cm} = - 5,5 \text{ mm}, (3)$$

unde $p_0 / (\rho g) = 76,0 \text{ cm}$, $H_1 / (\rho g) = 77,0 \text{ cm}$ (denivelarea mercurului se inversează).

c) Punem acum în (1) condiția $H_2 = p_0 = 101,32 \text{ kPa}$ și $h_2 = 0$:

$$T_2' = T_1 \{ [p_0 / (\rho g)] : [H_1 / (\rho g) + h_1] \} (\ell_1 - h_1 / 2) : \ell_1 = = 286,8 \text{ K} = 13,6^\circ \text{C}. (4)$$

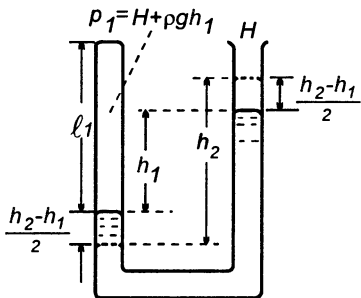


Fig.1.3.8

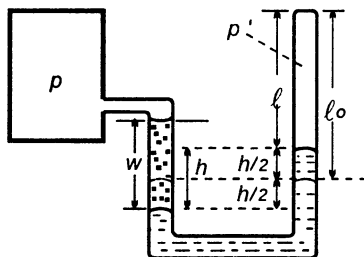


Fig.1.3.9

1.3.9. În condiții normale coloana de aer de la capătul închis al unui manometru cu mercur în formă de U are lungimea $\ell_0 = 27,3 \text{ cm}$ și denivelarea zero. Legat la o etuvă manometrul arată o denivelare a mercurului $h = 46 \text{ mm}$, temperatura fiind $t = 27^\circ \text{C}$, iar în ramura legată la etuvă s-a condensat o coloană de apă de lungime $w = 68 \text{ mm}$, ca în figură. Aflați presiunea din etuvă .

Rezolvare. Aerul din ramura închisă suferă o transformare *generală*. Inițial, - denivelarea fiind zero, - presiunea va fi egală cu

cea atmosferică. În starea finală, luând o suprafața orizontală trecând prin nivelul inferior al mercurului avem egalitatea presiunilor (*principiul vaselor comunicante*) :

$$p' + \rho gh = p + \rho_a gw \rightarrow p' = p + \rho_a gw - \rho gh. \quad (1)$$

Pe de altă parte, tubul având aceeași secțiune peste tot, avem evident din figură $\ell = \ell_o - h / 2$.

$$\rho_o \ell_o / T_o = (p + \rho_a gw - \rho gh)(\ell_o - h / 2) / T, \quad (2)$$

$$p = -\rho_a gw + \rho gh + p_o (T / T_o) \ell_o / (\ell_o - h / 2) = 127 \text{ kPa}. \quad (3)$$

1.3.10. Într-o eprubetă de lungime $2h$ se află o coloană de aer de lungime $h = 760$ mm peste care stă o coloană de mercur de înălțime $h = 760$ mm. Presiunea atmosferică este normală, iar temperatura $t = 7,0^\circ\text{C}$. Până la ce temperatură trebuie încălzit (cvasistatic) aerul din eprubetă pentru ca tot mercurul să curgă afară ? Reprezentați grafic procesul în diagramele $p - V$, $V - T$ și $p - T$.

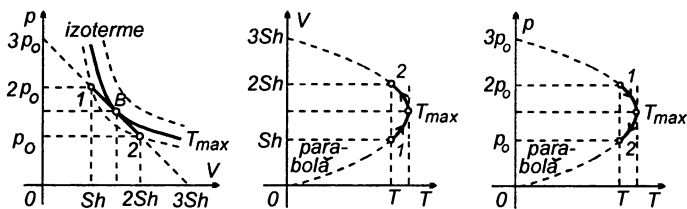


Fig.1.3.10

Rezolvare. În condiții normale de gravitație ($g_n = 9,80665$ m/s²) și temperatură (0°C) presiunea atmosferică normală $p_o = 101325$ Pa este echilibrată de o coloană de mercur înaltă de $h = 760$ mm [$\rho_{\text{Hg}}(0^\circ\text{C}) = 13595,1$ kg/m³]. Și reciproc, o coloană de mercur $h = 760$ mm exercită o presiune hidrostatică egală cu $p_o = 101325$ Pa numai dacă mercurul este la 0°C și gravitația este cea normală (g_n).

În cazul problemei, neglijând corecțiile de temperatură și gravitație, putem considera că $\rho gh = p_o$ și că ρ este practic constant. Atunci presiunea aerului din eprubetă egalează presiunea hidrostatică a coloanei de mercur ρgx plus presiunea atmosferică p_o :

$$\begin{aligned} p &= p_o + \rho gx = p_o + \rho g(2h - V / S) = \\ &= 3p_o - \rho gV / S = 3p_o - p_o V / (Sh) = a + b V, \end{aligned} \quad (1)$$

adică presiunea aerului variază *liniar* cu volumul, stările extreme având parametrii $(2p_0, Sh, T)$, $(p_0, 2Sh, T)$, temperatura fiind aceeași în stările 1, 2 (fiindcă pV este același). Temperatura este maximă acolo unde produsul pV este maxim :

$$pV = [3p_0 - p_0V / (Sh)] V = [p_0 / (Sh)] (3Sh - V) V. \quad (2)$$

Deoarece suma ultimilor doi factori este *constantă*, *produsul* lor este *maxim* când ei sunt egali :

$$3Sh - V = V \rightarrow V_m = 3Sh / 2, \quad (3)$$

introducând în (1) rezultă $p_m = 3p_0 / 2$. Considerăm acum transformarea *generală* de la **1** la **B** :

$$2p_0 \cdot Sh / T = (3p_0 / 2)(3Sh / 2) : T_{\max},$$

$$T_{\max} = T \cdot 9/8 = 315 \text{ K} = 42^\circ\text{C}. \quad (4)$$

Se poate judeca și astfel : Trasăm familia de *izoterme*. Observăm că există în general 2 puncte de intersecție cu graficul procesului - cele două volume. Izoterma cu temperatura maximă este *tangentă* la dreapta procesului, deci cele două rădăcini pentru V (sau p) se confundă (după aceea avem rădăcini complexe).

$$p = 3p_0 - p_0V / (Sh) \text{ \& } pV = c = \text{const} \Rightarrow [3p_0 - p_0V / (Sh)]V = c, \quad (5)$$

$$V^2 \cdot p_0 / (Sh) - V \cdot 3p_0 + c = 0. \quad (6)$$

Această ecuație de gradul 2 în V are rădăcini confundate dacă discriminantul este nul și atunci rădăcina dublă este $[-b / (2a)]$:

$$V_m = 3p_0 : [2p_0 / (Sh)] = 3Sh / 2, \text{ etc.} \quad (7)$$

Pentru a obține grafice folosim ecuația de stare :

$$pV = \nu RT, \quad [3p_0 - p_0V / (Sh)]V = \nu RT - \text{parabolă}, \quad (8)$$

$$pV = \nu RT, \quad p [3Sh - Sh \cdot p / p_0] = \nu RT - \text{parabolă}, \quad (9)$$

fiind funcții *pătratice*.

1.3.11. Într-un cilindru vertical cu secțiunea $S = 20 \text{ cm}^2$, închis cu un piston care se poate mișca etanș fără frecări, se află gaz ideal. Se pune peste piston un corp de masă $m = 5,0 \text{ kg}$ și se crește temperatura absolută cu $f = 10 \%$. S-a constatat că volumul gazului a scăzut cu același procentaj f . Aflați masa pistonului, presiunea atmosferică fiind normală.

Rezolvare. Gazul din cilindru suferă o transformare *generală*. Presiunea gazului este egală cu presiunea atmosferică la care se adaugă presiunea exercitată de greutatea pistonului (și corpului) :

$$(H + m_0g / S) V / T = [H + (m_0 + m)g / S](1 - f) V / [(1 + f)T], \quad (1)$$

$$m_0 = m (1 - f) / (2f) - HS / g = 1,83 \text{ kg}. \quad (2)$$

1.3.12. Un vas de masă $M = 2,00$ kg și lungime $L = 1,00$ m, cu roțile, se poate mișca fără frecare pe un plan orizontal. Vasul este împărțit în două jumătăți. În jumătatea stângă se află gaz ideal de masă $m = 40$ g și temperatură T , iar jumătatea dreaptă este vidată. La un moment dat peretele despărțitor se deschide. Care va fi temperatura finală a gazului și cu cât se deplasează vasul ?

Rezolvare. Din experiența lui **J. P. Joule** (1843) privind energia internă a gazului ideal se știe că la destinderea gazului în vid nu se efectuează lucru mecanic și energia internă a gazului ideal depinde numai de temperatură și nu depinde de volum. Prin urmare, în cazul nostru temperatura gazului nu se schimbă, el nu efectuează lucru mecanic și nu face schimb de căldură cu exteriorul ($T_{\text{final}} = T$).

Alegem axa Ox orizontală, cu sensul spre dreapta, cu originea în centrul vasului. Atunci, nefiind forțe orizontale, centrul de masă (CM) al sistemului rămâne pe loc, și deoarece jumătate din gaz se duce în jumătatea din dreapta, vasul se va deplasa spre stânga :

$$x_{\text{CM}} = [m(-L/4) + M \cdot 0] : (m+M) = x'_{\text{CM}} = [(m+M)s : (m+M), \quad (1)$$

$$s = -(L/4) m : (m + M) = -5,0 \text{ mm (spre stânga)}. \quad (2)$$

1.3.13. Un gaz ideal suferă procesul din figură. Se cunosc temperaturile $T_1 = 250$ K, $T_2 = 300$ K. Aflați T_3 . Reprezentați procesul în diagramele $V - T$ și $p - T$.

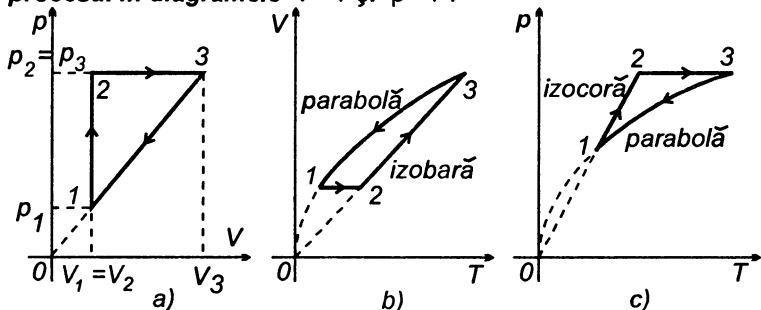


Fig.1.3.13

Rezolvare. Pentru transformarea izocoră 1 - 2 avem :

$$T_1 / T_2 = p_1 / p_2 = p_1 / p_3. \quad (1)$$

Pe de altă parte, pentru transformarea liniară 1 - 3 avem (din asemănarea triunghiurilor) :

$$p_1 / p_3 = V_2 / V_3, \text{ dar } V_2 / V_3 = T_2 / T_3 \text{ (izobara 2 - 3)}. \quad (2)$$

Egalând (1) cu (2) obținem :

$$p_1/p_3 = T_1/T_2 = T_2/T_3 \rightarrow T_3 = T_2^2/T_1 = 360 \text{ K.} \quad (3)$$

Ecuția procesului 1 - 3 este reprezentată de o *dreaptă* în diagrama $p - V$, deci are ecuația de forma : $p = a \cdot V$ ($a = \text{const}$). Atunci, folosind ecuația de stare avem :

$$pV = \nu RT \rightarrow aV^2 = \nu RT - \text{parabolă}, \quad (4)$$

$$pV = \nu RT \rightarrow p^2/a = \nu RT - \text{parabolă}. \quad (5)$$

În diagrama $V - T$, respectiv $p - T$, izobara, respectiv izocora, se reprezintă printr-o *dreaptă* trecând prin origine (v. figura). În $V - T$ sensul de parcurgere a ciclului se inversează.

1.3.14. Un gaz ideal suferă procesul din figură: $V_1 = 1,00 \text{ L}$, $V_2 = 4,00 \text{ L}$, $T_1 = 100 \text{ K}$, $T_3 = 300 \text{ K}$. Pe porțiunea 2 - 3 există o stare 4 cu $p_4 = p_1$. Aflați V_4 . Reprezentați procesul în diagramele $p - V$ și $p - T$.

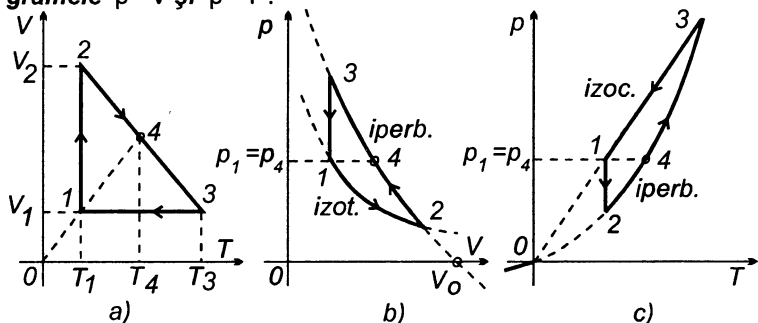


Fig.1.3.14

Rezolvare. Din asemănarea triunghiurilor avem :

$$(V_2 - V_1) : (V_4 - V_1) = (T_3 - T_1) : (T_3 - T_4). \quad (1)$$

Pe de altă parte, pentru transformarea *izobară* 1 - 4 avem :

$$V_4/V_1 = T_4/T_1, \quad T_4 = T_1 \cdot V_4/V_1. \quad (2)$$

Introducem V_4 (2) în (1) și obținem :

$$V_4 = (V_2 T_3 - V_1 T_1) : [T_3 + T_1(V_2/V_1 - 2)] = 2,2 \text{ L}. \quad (3)$$

Ecuția procesului 2 - 3 se scrie

$$V = V_0 - a T \rightarrow T = (V_0 - V) / a. \quad (4)$$

Atunci ecuația de stare dă:

$$p = \nu RT / V = \nu R(V_0 - V) / (aV) - \text{iperbolă}, \quad (5)$$

$$p = \nu RT / V = \nu R T / (V_0 - a T) - \text{iperbolă}. \quad (6)$$

1.3.15. Un gaz ideal parcurge procesul ciclic din figură. Reprezentați procesul în diagramele $V - T$, $p - T$. Cunoscând volumele extreme $V_1 = 1,00 \text{ L}$, $V_3 = 4,00 \text{ L}$, aflați $V_2 = V_4$.

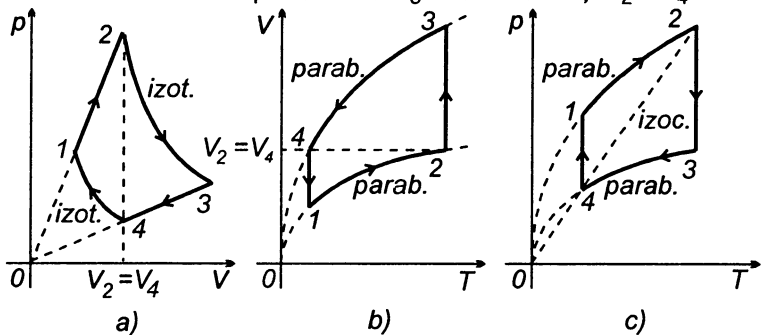


Fig.1.3.15

Rezolvare. Ecuațiile proceselor 1 - 2, 3 - 4 sunt

$$p = a_1 V, \quad p = a_2 V, \quad a_1 > a_2. \quad (1)$$

Atunci ecuația de stare dă

$$pV = \nu RT, \quad a_{1,2} V^2 = \nu RT, \quad V = \sqrt{\nu RT / a_{1,2}} \quad \text{- parabole.} \quad (2)$$

Pentru transformările izoterme avem:

$$p_1 V_1 = p_4 V_4 = p_4 V_2, \quad \text{respectiv} \quad p_2 V_2 = p_3 V_3. \quad (3)$$

Înlocuind aici (1), obținem

$$a_1 V_1^2 = a_2 V_2^2, \quad \text{respectiv} \quad a_1 V_2^2 = a_2 V_3^2. \quad (4)$$

Împărțind membru la membru aceste ecuații eliminăm $a_{1,2}$:

$$V_1^2 / V_2^2 = V_2^2 / V_3^2 \rightarrow V_2 = V_4 = \sqrt{V_1 V_3} = 2,00 \text{ L}. \quad (5)$$

1.3.16. Un cilindru orizontal este împărțit în două jumătăți de lungime $\ell = 13 \text{ cm}$ fiecare, de un piston de arie $S = 100 \text{ cm}^2$, care se mișcă etanș fără frecări. De o parte și de alta sunt gaze diferite aflate la aceeași temperatură $T = 300 \text{ K}$ și pistonul este în echilibru. Cu cât se va deplasa pistonul dacă într-o parte a cilindrului încălzim gazul cu $\Delta T = 30 \text{ K}$, iar în cealaltă păstrăm temperatura neschimbată ?

Rezolvare. Gazul din fiecare compartiment suferă o transformare generală :

$$pV/T = p'(V + Sx)/(T + \Delta T), \quad pV/T = p'(V - Sx)/T. \quad (1)$$

Împărțind ecuațiile membru la membru, obținem

$$1 = [(V + Sx)/(V - Sx)] \cdot T/(T + \Delta T)$$

$$\rightarrow x = (V/S) \cdot \Delta T : (2T + \Delta T) = \ell \cdot \Delta T : (2T + \Delta T) = 1,0 \text{ cm}. \quad (2)$$

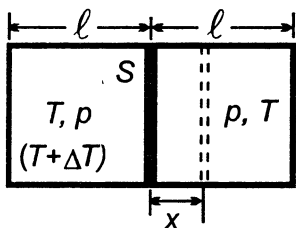
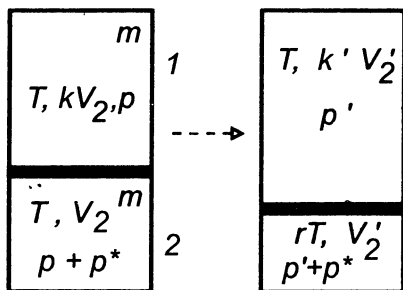


Fig.1.3.16



a)

b)

Fig.1.3.17

1.3.17. Într-un cilindru închis, așezat vertical, pistonul, care se mișcă etanș fără frecări, împarte gazul ideal în două mase egale cu aceeași temperatură, volumul superior fiind de $k = 3,0$ ori mai mare decât cel inferior. În ce raport r trebuie schimbată temperatura absolută a volumului inferior pentru ca acesta să devină de k' ori mai mare decât cel superior ?

Rezolvare. În cele două compartimente fiind mase egale din același gaz, cu aceeași temperatură, ele sunt legate prin transformarea izotermă :

$$p \cdot kV_2 = (p + p^*)V_2, \quad (1)$$

unde p^* este presiunea exercitată de greutatea pistonului. Din (1)

$$\text{rezultă : } p^* = p(k - 1). \quad (2)$$

De asemenea, gazul din jumătatea superioară suferă transformarea izotermă :

$$p \cdot kV_2 = p' \cdot k'V_2', \quad (3)$$

iar gazele din cele două compartimente în starea finală sunt legate prin transformarea generală :

$$p' \cdot k'V_2' / T = (p' + p^*) \cdot V_2' / (rT). \quad (4)$$

Ținând seama că volumul total este același :

$$V_2 + kV_2 = V_2' + k'V_2' \rightarrow V_2' / V_2 = (1 + k) / (1 + k'), \quad (5)$$

atunci din (3) și (2) rezultă :

$$p = p' (k' / k) (1 + k) / (1 + k'), \quad p^* = p' (k' / k) (k^2 - 1) / (1 + k'). \quad (6)$$

În sfârșit, din (4) scoatem raportul cerut, ținând seama de (6) :

$$r = (p' + p^*) / (p'k') = 1 / k' + (1 / k) \cdot (k^2 - 1) / (1 + k') = 47/60. \quad (7)$$

*

1.4. Ecuația de stare

1.4.1. Rețeaua cristalină a Fe la temperatura camerei este cubică cu volum centrat. Știind densitatea $\rho = 7870 \text{ kg/m}^3$, aflați distanța minimă dintre atomi.

Rezolvare. Fie ℓ - latura celulei cubice. Atunci unei astfel de celule îi revin: $1 + (1/8) \cdot 8 = 2$ atomi, fiindcă fiecare din cei 8 atomi din colțurile celulei aparțin la 8 celule vecine. Pe de altă parte, volumul unui mol (at.-g) de fier este A / ρ și deci unui atom îi revine volumul :

$$v_0 = (1 / N_A) \cdot A / \rho . \quad (1)$$

Prin urmare volumul unei celule elementare este $2v_0$. Distanța minimă dintre atomi este jumătate din diagonală spațială a celulei :

$$a_{\min} = \frac{\sqrt{3} \cdot \ell}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{2v_0} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\frac{2A}{N_A \rho}} = 2,5 \text{ \AA} . \quad (2)$$

1.4.2. Calculați masa molară medie (aparentă) a aerului știind densitatea aerului în condiții normale $\rho = 1,2928 \text{ kg/m}^3 \approx 1,293 \text{ kg/m}^3$ și volumul molar al gazelor în condiții normale.

Rezolvare. Volumul molar este volumul unui mol. Dar volumul molar al diferitelor gaze (ideale), luate în aceleași condiții de presiune și temperatură este același (consecință a legii lui Avogadro). Dacă aceste condiții sunt normale, valoarea volumului molar este $V_{\mu 0} = 22,4141 \text{ L/mol}$ (este o constantă a fizicii). Masa molară este masa unui mol, prin urmare

$$\mu_a = \rho_0 V_{\mu 0} = 28,97 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol} \approx 0,029 \text{ kg/mol} . \quad (1)$$

1.4.3. Volumul specific al unui gaz în condiții normale este $v_0 = 5,6 \text{ m}^3/\text{kg}$. Știind volumul molar al gazelor (ideale) în condiții normale, aflați masa molară a gazului.

Rezolvare. Volumul specific este volumul unității de masă :

$$v = V / m = 1 / \rho . \quad (1)$$

La fel ca în problema precedentă avem

$$\mu = \rho_0 V_{\mu 0} = (1 / v_0) V_{\mu 0} = 4,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol} \quad (2)$$

(poate fi de exemplu, heliu).

1.4.4. Fie m_i masele și μ_i masele molare ale gazelor componente ($i = 1, 2, \dots$) dintr-un amestec, m - masa totală și μ - masa molară aparentă (medie) a amestecului, $g_i = m_i / m$ - fracțiunile (sau procentajele) masice ale gazelor componente din amestec.

a) Demonstrați relația de aditivitate a numărului de moli la amestecuri sau relația de calcul a masei molare medii :

$$m / \mu = \sum (m_i / \mu_i) \text{ sau } 1 / \mu = \sum (g_i / \mu_i) .$$

b) Stabiliți relația de calcul a masei molare medii la gaze, știind fracțiunile volumice $r_i = V_i / V$ ale gazelor componente.

c) Stabiliți formulele de trecere între g_i și r_i .

Rezolvare. a) Știm că într-un *mol* din orice substanță există un număr de molecule N_A (numărul lui **Avogadro**). Atunci în $v = m / \mu$ moli vor fi $v N_A = m N_A / \mu$ molecule. Să luăm $v = m / \mu$ moli de amestec, unde μ este masa molară medie (sau aparentă).

Pe de o parte în această cantitate sunt global $m N_A / \mu$ molecule, iar pe de altă parte, sunt $\sum v_i N_A$ molecule, unde $v_i = m_i / \mu_i$ sunt cantitățile din fiecare substanță componentă :

$$v N_A = (m / \mu) N_A = \sum v_i N_A = \sum (m_i / \mu_i) N_A , \quad (1)$$

de unde simplificând cu N_A rezultă relația din enunț .

b) Numărul de moli se poate calcula (în afară de formula cunoscută $v = m / \mu$) și cu formula $v = V / V_\mu$. La gaze, luate în aceleași condiții de presiune și temperatură, volumul molar V_μ este același. Luăm o cantitate v moli de amestec. Atunci masa acestei cantități este, pe de o parte, global, $m = v \mu = (V / V_\mu) \mu$, unde μ este masa molară medie, și pe de altă parte, este suma maselor gazelor componente $\sum v_i \mu_i$, deci

$$m = v \mu = (V / V_\mu) \mu = \sum v_i \mu_i = \sum (V_i / V_\mu) \mu_i = \sum (r_i V / V_\mu) \mu_i , \quad (2)$$

de unde simplificând cu V / V_μ , rezultă relația cerută :

$$\mu = \sum r_i \mu_i . \quad (3)$$

c) Avem proporțiile la gaze :

$$\begin{aligned} r_1 : r_2 : r_3 : \dots &= (V_1 / V) : (V_2 / V) : (V_3 / V) : \dots = (V_1 / V_\mu) : (V_2 / V_\mu) : (V_3 / V_\mu) : \dots = \\ &= v_1 : v_2 : v_3 : \dots = (m_1 / \mu_1) : (m_2 / \mu_2) : (m_3 / \mu_3) : \dots = \\ &= (g_1 m / \mu_1) : (g_2 m / \mu_2) : (g_3 m / \mu_3) : \dots = (g_1 / \mu_1) : (g_2 / \mu_2) : (g_3 / \mu_3) : \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

de unde rezultă :

$$r_i : \sum r_k = r_i = (g_i / \mu_i) : \sum (g_k / \mu_k) = \mu g_i / \mu_i , \quad (5)$$

unde
$$\sum r_k = 1 , \quad 1 / \mu = \sum (g_k / \mu_k) . \quad (6)$$

Analog avem proporțiile la gaze:

$$\begin{aligned} g_1 : g_2 : g_3 : \dots &= (m_1 / m) : (m_2 / m) : (m_3 / m) : \dots = \\ &= (v_1 \mu_1) : (v_2 \mu_2) : (v_3 \mu_3) : \dots = (V_1 \mu_1 / V_\mu) : (V_2 \mu_2 / V_\mu) : (V_3 \mu_3 / V_\mu) : \dots = \\ &= (V_1 \mu_1 / V) : (V_2 \mu_2 / V) : (V_3 \mu_3 / V) : \dots = r_1 \mu_1 : r_2 \mu_2 : r_3 \mu_3 : \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

de unde rezultă:

$$g_i : \sum g_k = g_i = r_i \mu_i : \sum (r_k \mu_k) = r_i \mu_i / \mu , \quad (8)$$

unde
$$\sum g_k = 1 , \quad \mu = \sum (r_k \mu_k) \quad (9)$$

1.4.5. În figură este reprezentat un proces la presiune constantă, în funcție de T . Reprezentați grafic cum variază masa gazului în funcție de T .

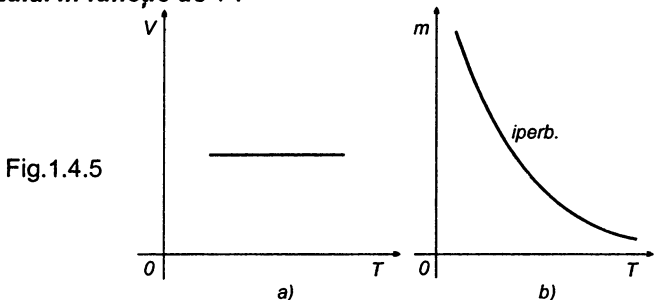


Fig.1.4.5

Rezolvare. Conform enunțului $p = \text{const}$, iar conform figurii $V = \text{const}$, atunci ecuația de stare dă:

$$pV = (m / \mu)RT \Rightarrow mT = \text{const} . \quad (1)$$

Aceasta reprezintă o iperbolă în diagrama $m - T$.

1.4.6. Un gaz suferă transformarea reprezentată în figură.

a) Dacă masa este constantă, cum a variat presiunea gazului ?

b) Dacă presiunea este constantă, cum a variat masa gazului ?

Rezolvare. Ducem prin origine drepte trecând prin stările 1, 2. Aceste drepte în diagrama $V - T$ au ecuația :

$$V = \text{const} \cdot T , \quad \text{dar} \quad V = [mR / (\mu p)] \cdot T . \quad (1)$$

a) Dacă $m = \text{const}$, panta acestor drepte este $\sim 1 / p$, deci de la 1 la 2 presiunea scade.

b) Dacă $p = \text{const}$, panta este $\sim m$, deci de la 1 la 2 masa crește.

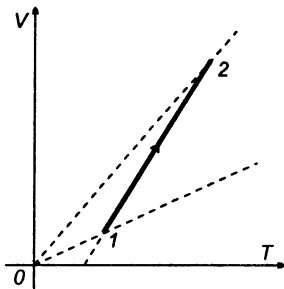


Fig.1.4.6

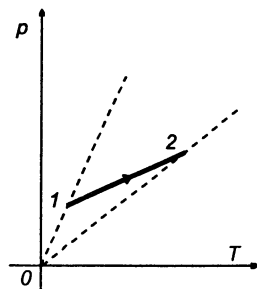


Fig.1.4.7

1.4.7. Un gaz suferă transformarea reprezentată în figură.

a) Dacă masa este constantă, cum a variat volumul ? b) Dacă volumul este constant, cum a variat masa gazului ?

Rezolvare. Ducem prin origine drepte trecând prin stările 1, 2. Aceste drepte, în diagrama $p - T$, au ecuația :

$$p = \text{const} \cdot T, \quad \text{dar} \quad p = [mR / (\mu V)] \cdot T. \quad (1)$$

a) Dacă masa este constantă, *panta* acestor drepte este $\sim 1 / V$, deci de la 1 la 2 volumul crește.

b) Dacă volumul este constant, *panta* este $\sim m$, deci de la 1 la 2 masa scade.

1.4.8. O masă dată de gaz suferă transformarea reprezentată în figură. Cum a variat volumul în această transformare ?

Rezolvare. Ducem *izocorele* prin cele 3 stări. Ecuația izocorelor este

$$p = [mR / (\mu V)] \cdot T, \quad (1)$$

deci *panta* este invers proporțională cu volumul, $\sim 1 / V$. Prin urmare, de la 1 la 2 volumul scade, apoi de la 2 la 3 crește, trecând în starea 1' prin același volum ca în starea inițială 1. În starea 3 volumul este *maxim* ($V_3 > V_1$).

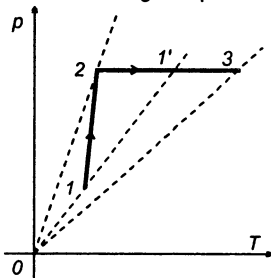


Fig.1.4.8

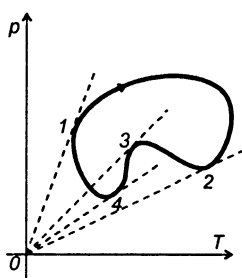


Fig.1.4.9

1.4.9. Un gaz ideal suferă o transformare la volum constant, reprezentată în figură. În ce puncte ale transformării masa gazului are valori extreme ?

Rezolvare. Ducem prin origine drepte tangente la ciclu :

$$p = [mR / (\mu V)] \cdot T. \quad (1)$$

Panta acestor drepte este proporțională cu masa : $[mR / (\mu V)] \sim m$. Prin urmare, în 1 și 2 masa este maximă, respectiv minimă, iar în 3, 4 este maximă, respectiv minimă relativă .

1.4.10. O masă $m = 10,0$ g N_2 suferă transformarea liniară din figură, unde $p_1 = 300$ kPa , $V_1 = 4,00$ L ; $p_2 = 100$ kPa, $V_2 = 8,00$ L. Ce temperatură maximă atinge gazul și care sunt parametrii de stare în acel moment ? Reprezentați procesele și în diagramele $V - T$, $p - T$.

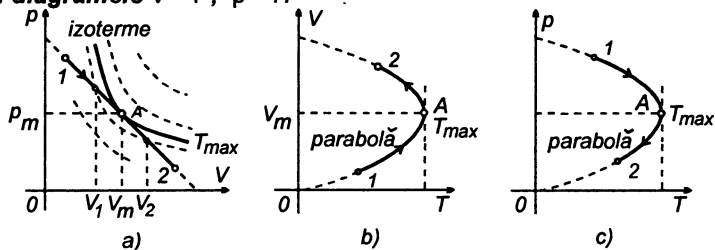


Fig.1.4.10

Rezolvare. Ecuația procesului este de forma :

$$p = p_0 - a V, \quad \text{dar } p_{1,2} = p_0 - a V_{1,2}, \quad (1)$$

$$p_0 = (V_2 p_1 - V_1 p_2) : (V_2 - V_1) = 500 \text{ kPa},$$

$$a = -(p_2 - p_1) : (V_2 - V_1) = 50,0 \text{ kPa/L}. \quad (2)$$

Folosind ecuația de stare și ecuația procesului (1) avem

$$\nu RT = pV = (p_0 - aV) \cdot V = a(p_0/a - V) V. \quad (3)$$

Suma celor doi factori fiind constantă, produsul lor este maxim când ei sunt egali :

$$p_0/a - V = V \Rightarrow V_m = p_0 / (2a) = 5,0 \text{ L}, \quad (4)$$

$$p_m = p_0 - aV_m = p_0 / 2 = 250 \text{ kPa},$$

$$T_m = p_m V_m / (mR) = 421 \text{ K} = 148^\circ\text{C}. \quad (5)$$

Se poate judeca și altfel. Ecuația (3) pentru T este pătratică și se reprezintă, deci, printr-o parabolă, care are un maxim (coeficientul lui V^2 este negativ, $-a$) pentru

$$V_m = [-b / (2a)] = -p_0 / (-2a), \text{ etc.} \quad (6)$$

În sfârșit, dacă trasăm familia de **izoterme** $pV = \text{const}$ și le intersectăm cu *dreapta* procesului, $pV = \text{const} = (p_0 - aV) \cdot V$, (7) observăm că pentru diferite izoterme obținem fie două puncte de intersecție, deci două valori pentru volum (două rădăcini reale distincte), fie o rădăcină *dublă* dată de izoterma **tangentă** la dreaptă, care dă T_{\max} , fie nici un punct de intersecție (rădăcini complexe pentru $T > T_{\max}$). Prin urmare, punctul căutat corespunde rădăcinii *duble* a ecuației (7), deci discriminantul trebuie să fie egal cu zero și rădăcina dublă este chiar (6).

Pentru trasarea graficelor observăm că

$$pV = \nu RT \rightarrow (p_0 - aV) V = \nu RT \text{ - parabolă ,} \quad (8)$$

$$p = \nu RT / V = \nu RT \cdot a / (p_0 - p) \text{ - parabolă .} \quad (9)$$

1.4.11. Prin ventilul unui balon a ieșit gaz, astfel încât presiunea a scăzut cu $f_1 = 40\%$, iar temperatura absolută a scăzut cu $f_2 = 20\%$. Cât la sută din masa gazului a ieșit afară din balon ?

Rezolvare. Aplicăm ecuația de stare pentru cele două stări :

$$p_1 V = (m_1 / \mu) RT_1, \quad (1 - f_1) p_1 \cdot V = [(1 - f)m / \mu] R(1 - f_2) T_1, \quad (1)$$

de unde prin împărțire membru la membru rezultă :

$$f = (f_1 - f_2) : (1 - f_2) = 25\% . \quad (2)$$

1.4.12. Un balon poate conține $m_1 = 0,100$ kg O_2 în condiții normale. Ce masă de CO_2 poate conține balonul la temperatura $t = 13^\circ C$ și presiunea $p = 1,60$ MPa ?

Rezolvare. Scriem ecuația de stare în cele două cazuri :

$$p_0 V = (m_1 / \mu_1) RT_0, \quad pV = (m_2 / \mu_2) RT, \quad (1)$$

de unde, prin împărțire membru la membru, obținem :

$$m_2 = m_1 \mu_2 p T_0 : (\mu_1 p_0 T) = 2,1 \text{ kg .} \quad (2)$$

1.4.13. Un pahar cilindric de secțiune $S = 9,8$ cm² și masa $m = 200$ g este așezat cu gura în jos pe un plan orizontal nedit de cauciuc, temperatura fiind $t = 27^\circ C$ și presiunea atmosferică $H = 100$ kPa . Până la ce temperatură trebuie încălzit paharul pentru ca din el : a) să înceapă să iasă aer , b) să iasă $f = 25\%$ din masa de aer. c) Cu ce forță va apăsa paharul pe plan dacă acum răcim paharul până la temperatura inițială ?

Rezolvare. a) Presiunea aerului încălzit din pahar trebuie să echilibreze presiunea atmosferică plus presiunea datorită greutateii paharului $p = H + mg / S$, deci, transformarea fiind izocoră :

$$(H + mg/S) : H = T_1 : T \rightarrow T_1 = T(H + mg/S) : H = 306 \text{ K} = 33^\circ\text{C}. (1)$$

b) Aerul poate să iasă din pahar numai dacă presiunea sa $p \geq H + mg/S$, deci pentru cele două stări :

$$H \cdot Sh = (M/\mu)RT, \quad (H + mg/S) \cdot Sh = (1 - f)(M/\mu)RT_2, \\ T_2 = [T/(1 - f)](H + mg/S) / H = T_1 / (1 - f) = 408 \text{ K} = 135^\circ\text{C}. (2)$$

c) Forța cu care paharul apasă pe planul orizontal este egală cu greutatea sa mg plus forța de apăsare asupra fundului paharului datorită *diferenței* de presiune din exterior (atmosferică) și interior $(H - p)S$. Scriem ecuația transformării **izocore** respective :

$$p : (H + mg/S) = T : T_2 = (1 - f) H : (H + mg/S) \rightarrow p = (1 - f) H, (3) \\ N = mg + (H - p)S = mg + fHS = 26,5 \text{ N}. (4)$$

1.4.14. Un balon de greutate $G = 580 \text{ N}$ este umplut cu o masă de heliu la aceeași presiune și temperatură ca și aerul ambiant. Aflați forța ascensională.

Rezolvare. Forța ascensională este diferența dintre forța arhimedică cu care balonul este împins de jos în sus și greutatea balonului (cu conținutul său). Forța arhimedică este egală cu greutatea volumului de fluid dezlocuit. Prin urmare,

$$F = [\rho V / (RT)] \mu_{\text{aer}} \cdot g - mg - G. (1)$$

Dar pentru masa de heliu avem ecuația de stare :

$$\rho V = (m/\mu_{\text{He}})RT \rightarrow m_{\text{aer dezl.}} = [\rho V / (RT)] \mu_{\text{aer}} = m \cdot \mu_{\text{aer}} / \mu_{\text{He}}, (2) \\ F = mg(\mu_{\text{aer}} / \mu_{\text{He}} - 1) - G = 400 \text{ N}. (3)$$

1.4.15. Un vas cilindric orizontal, de lungime $\ell = 85 \text{ cm}$, este împărțit în două părți printr-un piston care se poate mișca etanș fără frecări. Într-o parte se introduce o masă de oxigen, iar în cealaltă parte o masă egală de hidrogen la aceeași temperatură. Ce lungime din cilindru va ocupa oxigenul ?

Rezolvare. Pistonul fiind în echilibru mecanic, de o parte și de alta presiunea este aceeași. Scriem ecuația de stare pentru cele două gaze :

$$pSx = (m/\mu_1)RT, \quad pS(\ell - x) = (m/\mu_2)RT, (1)$$

de unde, prin împărțire membru la membru, rezultă :

$$x = \ell \cdot \mu_2 : (\mu_1 + \mu_2) = 5,0 \text{ cm}. (2)$$

1.4.16. Un cilindru orizontal închis este împărțit în două jumătăți printr-un piston care se poate mișca etanș fără frecări. În cele două jumătăți se află mase egale de azot, respectiv oxigen. Cu cât la sută se schimbă volumul fiecărui gaz după ce pistonul se eliberează și se stabilește echilibrul final (la aceeași temperatură ?

Rezolvare. Notăm volumul fiecărei jumătăți cu V și scriem *ecuația de stare* pentru fiecare gaz în starea finală de echilibru, când presiunea de o parte și de alta a pistonului va fi aceeași :

$$p(V + \Delta V) = (m / \mu_1)RT, \quad p'(V - \Delta V) = (m / \mu_2)RT, \quad (1)$$

de unde , prin împărțire membru la membru, rezultă:

$$\Delta V / V = (\mu_2 - \mu_1) : (\mu_2 + \mu_1) = 3,3 \% . \quad (2)$$

1.4.17. În cele două jumătăți ale unui cilindru orizontal, fiecare de lungime $\ell = 10,0$ cm , separate printr-un piston care se poate mișca etanș fără frecări, se află mase egale din același gaz la aceeași temperatură a mediului ambiant. Într-una din jumătăți se introduce suplimentar o masă m_0 din același gaz de $k = 8,0$ ori mai mare decât masa inițială m din acel compartiment. Aflați cu cât se deplasează pistonul.

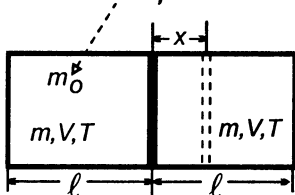


Fig.1.4.17

Rezolvare. Scriem *ecuația de stare* pentru gazele din cele două compartimente, în starea finală. Din condiția de *echilibru mecanic* a pistonului presiunea trebuie să fie aceeași :

$$p'(\ell + x)S = [(m + m_0) / \mu]RT, \quad p'(\ell - x)S = (m / \mu)RT, \quad (1)$$

de unde prin împărțire membru la membru, obținem :

$$x = \ell \cdot m_0 : (2m + m_0) = \ell \cdot k : (2 + k) = 8,0 \text{ cm} . \quad (2)$$

1.4.18. Un cilindru orizontal închis, de volum $V = 3,00$ L, este împărțit în două compartimente printr-un piston termoizolant, mobil, etanș, fără frecări, aflat în echilibru mecanic. Într-un compartiment se află $v_1 = 2,00$ mol de gaz la temperatura $t_1 = 27^\circ\text{C}$, iar în celălalt $v_2 = 3,00$ mol din alt gaz la $t_2 = 127^\circ\text{C}$. Aflați volumele $V_{1,2}$. La ce temperaturi pistonul va fi la mijlocul cilindrului ?

Rezolvare. Presiunea de o parte și de alta a pistonului este aceeași, fiindcă pistonul este în *echilibru mecanic*. Scriem *ecuația de stare* pentru cele două gaze :

$$pV_1 = v_1RT_1, \quad pV_2 = v_2RT_2 \rightarrow V_1 / V_2 = v_1T_1 / (v_2T_2), \quad (1)$$

dar $V = V_1 + V_2$, astfel încât rezultă :

$$V_1 = V \cdot v_1 T_1 : (v_1 T_1 + v_2 T_2) = 1,00 \text{ L} ,$$

$$V_2 = V \cdot v_2 T_2 : (v_1 T_1 + v_2 T_2) = 2,00 \text{ L} . \quad (2)$$

Dacă pistonul se află la mijloc : $V_{1,2} = V/2$ și ecuațiile de stare sunt acum :

$$p' V/2 = v_1 R T_1' , \quad p' V/2 = v_2 R T_2' \rightarrow T_1'/T_2' = v_2/v_1 = 3/2 . \quad (3)$$

Temperaturile cerute trebuie să fie în raportul $3/2$. Pentru a le determina separat mai trebuie o condiție. De exemplu, dacă cerem în plus ca presiunea să rămână neschimbată $p' = p$, atunci avem transformările **izobare** :

$$(V/2) : V_1 = T_1'/T_1 , \quad (V/2) : V_2 = T_2'/T_2 , \quad (4)$$

de unde rezultă, ținând seama de (2),

$$T_1' = T_1 \cdot (v_1 T_1 + v_2 T_2) / (2 v_1) = 450 \text{ K} ,$$

$$T_2' = T_2 \cdot (v_1 T_1 + v_2 T_2) / (2 v_2) = 300 \text{ K} , \quad (5)$$

1.4.19. Un vas cilindric orizontal este împărțit cu ajutorul unui piston termoconductor, mobil etanș, fără frecări, în două compartimente cu raportul volumelor $V_1/V_2 = 3/2$. Temperaturile inițiale ale gazului $t_1 = 27^\circ\text{C}$, $t_2 = 127^\circ\text{C}$, pistonul fiind în echilibru mecanic. Care va fi raportul volumelor după stabilirea echilibrului termic ?

Rezolvare. Pistonul fiind în *echilibru mecanic*, presiunea de o parte și de alta este aceeași. Scriem ecuația de stare pentru gazele din cele două compartimente :

$$pV_1 = v_1 R T_1 , \quad pV_2 = v_2 R T_2 \rightarrow v_1/v_2 = V_1 T_2 / (V_2 T_1) ; \quad (1)$$

$$p' V_1' = v_1 R T , \quad p' V_2' = v_2 R T , \quad (2)$$

de unde rezultă : $V_1'/V_2' = v_1/v_2 = V_1 T_2 / (V_2 T_1) = 2,00 . \quad (3)$

1.4.20. Dintr-un balon de volum $V = 200 \text{ L}$ conținând gaz la temperatura $T_1 = 273 \text{ K}$ și presiunea $p_1 = 2,0 \text{ MPa}$, s-a consumat o cantitate de gaz, care în condițiile normale are volumul $V_0 = 1,00 \text{ Nm}^3$ ("normal-metru cub"). Măsurând acum presiunea din balon s-a găsit $p_2 = 1,4 \text{ MPa}$. La ce temperatură s-a măsurat această presiune ? Se cunoaște volumul molar al gazelor în CN și constanta gazelor R .

Rezolvare. În starea inițială avem ecuația de stare :

$$p_1 V = v_1 R T_1 . \quad (1)$$

Știind volumul pe care îl ocupă gazul consumat în condiții normale (CN) $V_0 = 1,00 \text{ Nm}^3$ (Nm^3 - normal-metru cub, adică metru cub de

gaz în condiții **normale** de presiune și temperatură) și știind volumul molar al gazelor în CN ($V_{\mu 0}$), putem afla numărul de moli de gaz consumat $v_{\text{cons.}} = V_0 / V_{\mu 0}$. Acum putem scrie **ecuația de stare** pentru gazul rămas în balon :

$$p_2 V = (v_1 - V_0 / V_{\mu 0}) RT_2 . \quad (2)$$

Introducând aici p_1 din (1) găsim temperatura cerută :

$$T_2 = p_2 V : \{ [p_1 V / (RT_1) - V_0 / V_{\mu 0}] R \} = 254,8 \text{ K} . \quad (3)$$

1.4.21. Într-un cilindru, sub un piston de arie $S = 2,0 \text{ dm}^2$ (care se poate mișca etanș fără frecări), se află o masă $m = 7,0 \text{ g}$ azot. Mărind temperatura gazului cu $\Delta T = 100 \text{ K}$, pistonul urcă cu $h = 10 \text{ cm}$, presiunea atmosferică fiind normală. Aflați masa pistonului .

Rezolvare. Presiunea gazului echilibrează presiunea atmosferică H plus presiunea exercitată de piston, datorită greutateii sale, Mg / S . Scriem **ecuația de stare** pentru cele două stări :

$$\begin{aligned} (H + Mg / S)V &= (m / \mu)RT , \\ (H + Mg / S)(V + Sh) &= (m / \mu)R(T + \Delta T) . \end{aligned} \quad (1)$$

Scădem ecuațiile membru cu membru :

$$(H + Mg / S)Sh = (m / \mu)R \Delta T , \quad (2)$$

$$M = m \cdot R \Delta T / (\mu hg) - SH / g = 5,0 \text{ kg} . \quad (3)$$

1.4.22. Într-un cilindru vertical închis, de înălțime $h = 60 \text{ cm}$, se află la mijloc în echilibru un piston mobil de masă $m = 20 \text{ kg}$. În partea inferioară se află $m_1 = 80 \text{ mg}$ H_2 , iar în partea superioară O_2 , temperatura ambelor gaze fiind $T = 300 \text{ K}$.

Aflați masa oxigenului.

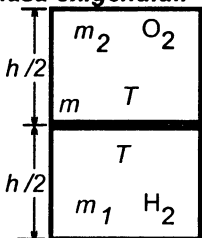


Fig.1.4.22

Rezolvare. Presiunea hidrogenului de sub piston echilibrează presiunea oxigenului de deasupra plus presiunea pistonului datorită greutateii sale (mg / S). Scriem **ecuația de stare** pentru cele două gaze:

$$p_2 \cdot Sh / 2 = (m_2 / \mu_2)RT , \quad (p_2 + mg / S) \cdot Sh / 2 = (m_1 / \mu_1)RT . \quad (1)$$

Introducem p_2 din prima ecuație în a doua și găsim masa cerută :

$$m_2 = m_1 \cdot \mu_2 / \mu_1 - mgh \mu_2 / (2RT) = 0,50 \text{ g} . \quad (2)$$

1.4.23. Un încălzitor pentru apă consumă metan la presiunea $p = 120 \text{ kPa}$ și temperatura $t = 17^\circ\text{C}$ cu randamentul $\eta = 60\%$. Ce debit volumic de metan este necesar pentru a asigura un debit $M^* = 130 \text{ kg/h}$ de apă încălzită cu $\Delta T = 80 \text{ K}$?

Rezolvare. Căldura necesară încălzirii apei, per unitatea de timp este $M^*c\Delta T$. Pe de altă parte, dacă q este puterea calorică a metanului, atunci căldura degajată per unitatea de timp, prin arderea metanului este m^*q , unde m^* este debitul de metan. Ținând seama de randamentul încălzitorului, avem condiția :

$$M^*c\Delta T = \eta m^*q . \quad (1)$$

Dar debitului masic de metan m^* îi corespunde debitul volumic D :

$$pD = (m^*/\mu)RT \rightarrow D = (m^*/\mu)RT/p , \quad (2)$$

$$D = M^*c\Delta T \cdot RT / (\eta q \mu p) = 1,7 \text{ m}^3/\text{h} . \quad (3)$$

Putem exprima debitul în normal-metri cubi (Nm^3) :

$$pD/T = p_0D_0/T_0 \rightarrow D_0 = D \cdot pT_0/(p_0T) = 1,9 \text{ Nm}^3/\text{h} . \quad (4)$$

1.4.24. Un balon de volum $V = 1,00 \text{ m}^3$, având masa învelișului $m = 0,38 \text{ kg}$, este umplut cu He la temperatura $t = 27^\circ\text{C}$ și presiunea $p = 124,6 \text{ kPa}$. Aflați înălțimea la care balonul va fi în suspensie, considerând că presiunea și temperatura atmosferică scad aproximativ liniar cu înălțimea cu gradientul $p^* = 13,33 \text{ Pa/m}$, respectiv $t^* = 0,50 \text{ K}/(100 \text{ m})$. La sol presiunea este normală și temperatura $t = 27^\circ\text{C}$.

Rezolvare. Condiția de plutire dă egalitatea dintre greutatea balonului împreună cu conținutul său și greutatea aerului dezlocuit, și anume: $mg + [\mu_{\text{He}}pV/(RT)]g = m_{\text{aer}} \text{dezl.} \cdot g \rightarrow m_{\text{aer}} \text{dezl.} = 0,58 \text{ kg}$. (1)

La înălțimea h presiunea și temperatura aerului sunt

$$p_h = H - p^* \cdot h , \quad t_h = t - t^* \cdot h , \quad (2)$$

astfel încât masa de aer dezlocuită este, pe de altă parte,

$$m_{\text{aer}} \text{dezl.} = \mu_{\text{aer}} p_h V / (RT_h) = \mu_{\text{aer}} (H - p^* h) V : [R(T - t^* h)] . \quad (3)$$

Ținând seama de (1) obținem

$$h = (HV - RT m_{\text{aer}} \text{dezl.} / \mu_{\text{aer}}) : (p^* - R t^* m_{\text{aer}} \text{dezl.} / \mu_{\text{aer}}) = 5,3 \text{ km} . \quad (4)$$

1.4.25. O fiolă de volum $V = 3,0 \text{ cm}^3$ conține $m = 5,0 \text{ g}$ radium. Radiumul Ra-226 emite particule α (nuclee de heliu) cu perioada de înjumătățire $T_{1/2} = 1620 \text{ ani}$. Cu cât crește presiunea din fiolă după $t = 1,0 \text{ ani}$, temperatura fiind $t^\circ = 27^\circ\text{C}$?

Rezolvare. Prin definiție 1 g Ra are activitatea :

$$A = 1 \text{ Ci (curie)} = 3,70 \cdot 10^{10} \text{ dezint./s} = 3,70 \cdot 10^{10} \text{ Bq (becquerel în SI)}. \quad (1)$$

Atunci în timpul t în fiolă vor apărea $N = A \cdot t$ atomi de heliu și presiunea va crește cu :

$$\Delta p = (N/V) kT = (At/V)(RT/N_A) = 8,0 \text{ kPa}. \quad (2)$$

Se poate judeca și detaliat. Legea dezintegrării radioactive este cunoscută :

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \text{ unde } \lambda = (\ln 2) / T_{1/2} - \text{constanta radioactivă}. \quad (3)$$

Activitatea unei surse reprezintă numărul de nuclee care se dezintegrează pe unitatea de timp :

$$A = -dN/dt = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \lambda N. \quad (4)$$

În cazul nostru $t = 1 \text{ an} \ll T_{1/2} = 1620 \text{ ani}$, de aceea

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \approx \lambda N_0 \quad (5)$$

sau altfel

$$e^{-\lambda t} \cong 1 - \lambda t, \text{ dacă } \lambda t \ll 1, N \cong N_0(1 - \lambda t), \quad (6)$$

$$N_0 - N \cong N_0 \lambda t \cong At, N_0 = (m/\mu) N_A, \quad (7)$$

deci presiunea suplimentară :

$$\begin{aligned} \Delta p &= [(N_0 - N)/V] kT \approx (N_0 \lambda t/V) (RT/N_A) = \\ &= (m/\mu) [(\ln 2)/T_{1/2}] t RT/V = 8,0 \text{ kPa}. \end{aligned} \quad (8)$$

1.4.26. Un balon conține aer la presiunea atmosferică H .

Prin evacuarea unei părți din aer presiunea scade la p . Apoi se introduce în balon hidrogen până când presiunea amestecului devine din nou H . Se evacuează din nou o parte din amestec scăzând presiunea la p și apoi se introduce tot hidrogen pentru a restabili presiunea H . Aflați raportul m_{H_2}/m_{aer} al amestecului în acest moment.

Rezolvare. După prima evacuare rămân în balon:

$$v_{aer} = pV/(RT) \text{ la care se adaugă } v_{H_2} = (H - p) V/(RT). \quad (1)$$

După a doua evacuare numărul de moli se reduce în raportul p/H și deci rămân în balon $v_{aer} p/H$ și $v_{H_2} p/H$ moli, la care se

adaugă $v'_{H_2} = (H - p) V/(RT)$, deci amestecul final conține :

$$\text{aer: } v'_{aer} = [pV/(RT)] p/H, \quad (2)$$

$$\text{hidrogen: } v''_{H_2} = [(H - p) V/(RT)] p/H + (H - p) V/(RT). \quad (3)$$

Raportul cerut este deci

$$m_{H_2}/m_{aer} = v \cdot H_2 \mu_{H_2} / (v_{aer} \mu_{aer}) = (\mu_{H_2} / \mu_{aer}) \cdot (H^2 - p^2) / p^2. \quad (4)$$

1.4.27. Un balon a fost cântărit vidat, obținându-se masa $m_1 = 1,000 \text{ kg}$, apoi umplut cu oxigen la presiunea atmosferică normală, obținându-se $m_2 = 1,016 \text{ kg}$, apoi umplut cu un gaz necunoscut la presiunea $p = 202,6 \text{ kPa}$, obținându-se $m_3 = 1,044 \text{ kg}$. Aflați masa molară a gazului necunoscut.

Rezolvare. Pentru cele trei cântăriri (în aer) avem respectiv (m_b - masa balonului, F_A - forța arhimedică):

$$m_1 = m_b - F_A / g, \quad m_2 = m_b + \mu_O \rho_O V / (RT) - F_A / g = m_1 + \mu_O \rho_O V / (RT), \quad (1)$$

$$m_3 = m_b + \mu V / (RT) - F_A / g = m_1 + \mu V / (RT). \quad (2)$$

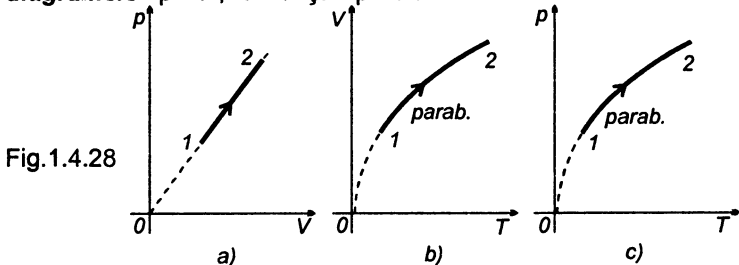
Din aceste ecuații rezultă

$$(m_3 - m_1) : (m_2 - m_1) = \mu \rho / (\mu_O \rho_O) \rightarrow$$

$$\mu = \mu_O (\rho_O / \rho) (m_3 - m_1) : (m_2 - m_1) = 0,044 \text{ kg/mol} \quad (3)$$

(probabil CO_2).

1.4.28. Un gaz se transformă după legea $V = B p$, $B = \text{const}$. În ce raport se schimbă presiunea dacă temperatura se schimbă în raportul $T_2/T_1 = 2,25$? Reprezentați procesul în diagramele $p - V$, $V - T$ și $p - T$.



Rezolvare. Pentru cele două stări avem ecuația de stare :

$$vRT_1 = p_1 V_1 = B p_1^2, \quad vRT_2 = p_2 V_2 = B p_2^2. \quad (1)$$

Prin împărțirea ecuațiilor membru la membru, obținem

$$p_2 / p_1 = \sqrt{T_2 / T_1} = 1,5.$$

Pentru grafic avem

$$vRT = pV = V^2 / B - \text{parabolă}, \quad (3)$$

$$vRT = pV = B p^2 - \text{parabolă}. \quad (4)$$

1.4.29. Volumul unei mase de gaz ideal variază cu temperatura după legea $V = B T^n$, $B = \text{const}$, $n > 0$. Cum variază presiunea cu temperatura? Dar presiunea cu volumul? Trasați graficele respective.

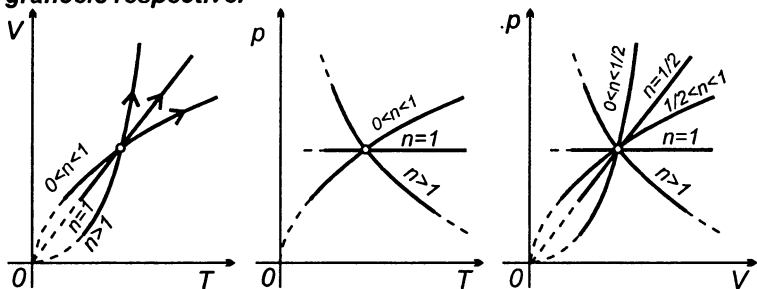


Fig.1.4.29

Rezolvare. $\nu RT = pV = p B T^n \rightarrow p = (\nu R / B) \cdot T^{1-n}$, (1)
 deci presiunea crește cu temperatura dacă $0 < n < 1$ și scade cu temperatura dacă $n > 1$.

$pV = \nu RT = \nu R \cdot V^{1/n} / B^{1/n} \rightarrow p = (\nu R / B^{1/n}) \cdot V^{1/n-1}$ (2)
 cu variație asemănătoare celei precedente.

1.4.30. Se încălzește sau se răcește un gaz ideal, dacă el se destinde după legea $p = B / V^n$, $B = \text{const}$, $n > 0$? Reprezentați procesul în diagramele $p - V$, $V - T$ și $p - T$.

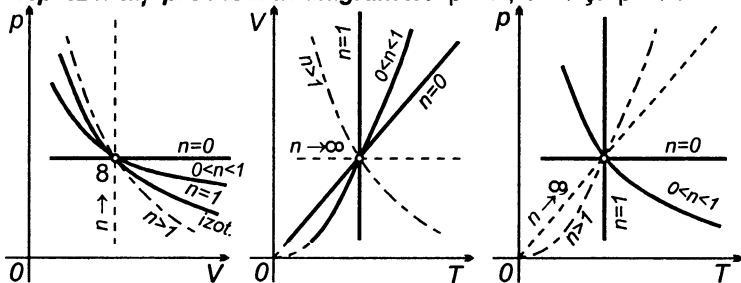


Fig.1.4.30

Rezolvare. $T = pV / (\nu R) = [B / (\nu R)] \cdot V^{1-n}$, (1)
 deci pentru $0 < n < 1$ gazul se încălzește (la destindere), iar pentru $n > 1$ se răcește.

Pentru variabilele $p - T$ avem

$$p \cdot (B / p)^{1/n} = \nu RT \rightarrow p = (\nu R / B^{1/n})^{n/(n-1)} \cdot T^{n/(n-1)}. \quad (2)$$

1.4.31. O cantitate $\nu = 0,10$ mol de gaz ideal suferă o transformare după legea $p\sqrt{V} = A = 2,0 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot \text{L}^{1/2}$. Când gazul atinge temperatura T_0 el suferă în continuare o transformare după legea $pV^2 = B = 16 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot \text{L}^2$. Aflați temperatura T_0 .

Rezolvare. În starea cu temperatura T_0 avem simultan :

$$\nu RT_0 = pV = A\sqrt{V}, \quad \nu RT_0 = pV = B/V, \quad (1)$$

de unde rezultă imediat

$$\begin{aligned} A\sqrt{V} &= B/V \rightarrow V = (B/A)^{2/3}, \quad T_0 = B/(\nu RV) = \\ &= [B/(\nu R)](A/B)^{2/3} = \frac{1}{\nu R} \sqrt[3]{A^2 B} = 482 \text{ K} = 209^\circ\text{C}. \end{aligned} \quad (2)$$

1.4.32. Se numesc politrope transformările descrise de ecuația $pV^k = \text{const}$, unde k este un număr real numit indice sau exponent politropic. Cazuri particulare: izobara $k = 0$, izoterma $k = 1$, adiabata $k = \gamma = C_p/C_v = c_p/c_v$, izocora $k \rightarrow \pm\infty$.

a) Reprezentați familia de politrope pentru câteva valori k caracteristice. b) Găsiți ecuația politropelor în celelalte perechi de coordonate $V - T$, $p - T$. c) Pentru un ciclu (parcurs de o masă de gaz ideal), format din două perechi de politrope :

$pV^k = a_{1,2}$ și $pV^l = b_{1,2}$, arătați că $V_1V_3 = V_2V_4$, $p_1p_3 = p_2p_4$ și $T_1T_3 = T_2T_4$.

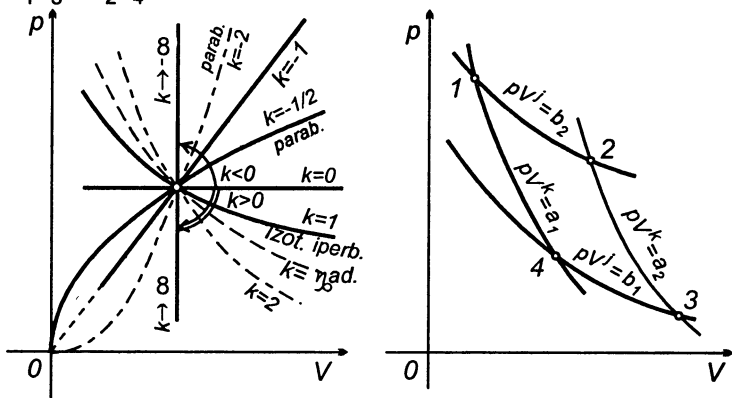


Fig.1.4.32

Rezolvare. a) V. figura pentru câteva valori particulare k .

b) $\text{const} = pV^k = pV \cdot V^{k-1} = \nu RT \cdot V^{k-1} \rightarrow TV^{k-1} = \text{const}. \quad (1)$

$$\text{const} = pV^k = pV \cdot (vRT/p)^k \rightarrow p^{1-k} T^k = \text{const.} \quad (2)$$

c) Pentru cele 4 puncte avem , respectiv :

$$p_1 V_1^k = a_1 , p_1 V_1^j = b_2 \rightarrow a_1 / b_2 = V_1^{k-j} , \quad (3)$$

$$p_2 V_2^k = a_2 , p_2 V_2^j = b_2 \rightarrow a_2 / b_2 = V_2^{k-j} , \quad (4)$$

$$p_3 V_3^k = a_2 , p_3 V_3^j = b_1 \rightarrow a_2 / b_1 = V_3^{k-j} , \quad (5)$$

$$p_4 V_4^k = a_1 , p_4 V_4^j = b_1 \rightarrow a_1 / b_1 = V_4^{k-j} , \quad (6)$$

Înmulțim membru cu membru ecuațiile (3), (5) între ele și respectiv ecuațiile (4), (6) între ele :

$$a_1 a_2 / (b_1 b_2) = (V_1 V_3)^{k-j} , a_2 a_1 / (b_2 b_1) = (V_2 V_4)^{k-j} \rightarrow V_1 V_3 = V_2 V_4 . \quad (7)$$

Repetăm raționamentul, folosind ecuația politropelor sub forma

$$p^{1/k} V = \text{const} : p_1^{1/k} V_1 / (p_1^{1/j} V_1) = a_1' / b_2' = p_1^{1/k-1/j} ,$$

$$a_2' / b_2' = p_2^{1/k-1/j} , a_2' / b_1' = p_3^{1/k-1/j} , a_1' / b_1' = p_4^{1/k-1/j} ,$$

$$a_1' a_2' / (b_1' b_2') = (p_1 p_3)^{1/k-1/j} , a_2' a_1' / (b_2' b_1') = (p_2 p_4)^{1/k-1/j} \rightarrow$$

$$p_1 p_3 = p_2 p_4 . \quad (8)$$

Înmulțind relațiile (7) și (8) între ele, obținem

$$(V_1 p_1)(V_3 p_3) = (V_2 p_2)(V_4 p_4) \rightarrow T_1 T_3 = T_2 T_4 . \quad (9)$$

În particular, dacă o pereche de politrope este formată din izocore, respectiv izobare , izoterme, atunci una din relațiile (7),(8),(9) devine banală, și anume : (7), respectiv (8), respectiv (9).

1.4.33. Printr-o conductă de secțiune variabilă curge gaz în regim staționar. La intrare în conductă viteza gazului este $v_1 = 2,9$ m/s, aria secțiunii transversale $S_1 = 0,102$ m², presiunea $p_1 = 100$ kPa și temperatura $T_1 = 290$ K. La ieșirea din conductă aria secțiunii $S_2 = 0,100$ m², presiunea $p_2 = 102$ kPa și temperatura $T_2 = 300$ K. Aflați viteza v_2 .

Rezolvare. În regim staționar de curgere este valabilă legea continuității : debitul masic este același de-a lungul conductei:

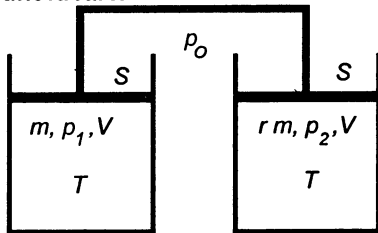
$$p_1 S_1 v_1 = p_2 S_2 v_2 \text{ sau } [\mu p_1 / (RT_1)] S_1 v_1 = [\mu p_2 / (RT_2)] S_2 v_2 , \quad (1)$$

$$v_2 = v_1 \cdot S_1 p_1 T_2 / (S_2 p_2 T_1) = 3,0 \text{ m/s} . \quad (2)$$

1.4.34. În dispozitivul din figură avem volume egale de gaz ideal, aflat inițial la aceeași temperatură, dar în cilindru 2 masa este de $r = 3,0$ ori mai mare. Mărim presiunea exterioară de $k = 1,50$ ori. Pentru a menține volumele neschimbate în primul cilindru temperatura absolută a fost mărită de $n_1 = 2,0$ ori. De

câte ori n_2 a fost mărită temperatura absolută în al doilea cilindru ? Pistoanele sunt ideale.

Fig.1.4.34



Rezolvare. Condiția de **echilibru mecanic** a pistoanelor cuplate, în cele două stări :

$$2p_0S = p_1S + p_2S, \quad 2kp_0S = p_1'S + p_2'S. \quad (1)$$

Ecuția de stare pentru gazele din cei doi cilindri :

$$p_1V = (m/\mu)RT, \quad p_2V = (rm/\mu)RT \rightarrow p_2 = rp_1; \quad (2)$$

$$p_1'V = (m/\mu)R \cdot n_1T = p_1V \cdot n_1 \rightarrow p_1' = n_1p_1, \quad (3)$$

$$p_2'V = (rm/\mu)R \cdot n_2T = p_1V \cdot rn_2 \rightarrow p_2' = rn_2p_1, \quad (4)$$

Conform ecuației (1) :

$$k = (p_1' + p_2') : (p_1 + p_2) = (n_1p_1 + rn_2p_1) : (p_1 + rp_1) = \\ = (n_1 + rn_2) : (1 + r), \quad (5)$$

$$n_2 = [k(r + 1) - n_1] : r = 2,0. \quad (6)$$

1.4.35. Într-un cilindru vertical închis, vidat, este suspendat de un resort un piston, care lunecă etanș fără frecări și a cărui poziție de echilibru este chiar pe fundul cilindrului. Sub piston se introduce o masă de aer la temperatura $t_1 = 27^\circ\text{C}$, înălțimea la care urcă pistonul fiind $h_1 = 10$ cm. La ce înălțime h_2 va urca pistonul dacă cantitatea de aer o mărim de $n = 5,0$ ori, iar temperatura o creștem până la $t_2 = 37^\circ\text{C}$?

Rezolvare. Scriem condițiile de **echilibru mecanic** a pistonului (greutatea pistonului este echilibrată de forța elastică dată de deformația inițială a resortului) :

$$p_1S = kh_1, \quad p_2S = kh_2 \rightarrow p_1/p_2 = h_1/h_2. \quad (1)$$

Scriem **ecuația de stare** pentru gazul de sub piston :

$$p_1 \cdot h_1S = (m/\mu)RT_1, \quad p_2 \cdot h_2S = (nm/\mu)RT_2, \quad (2)$$

$$p_2h_2/(p_1h_1) = n \cdot T_2/T_1, \quad \text{dar } p_2/p_1 = h_2/h_1, \quad (3)$$

$$(h_2/h_1)^2 = n \cdot T_2/T_1 \rightarrow h_2 = h_1\sqrt{nT_2/T_1} = 22,7 \text{ cm.} \quad (4)$$

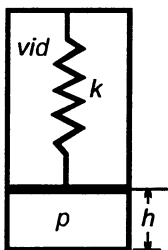


Fig.1.4.35

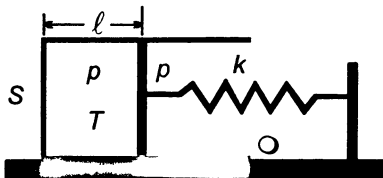


Fig.1.4.36

1.4.36. Un cilindru cu piston conține gaz la temperatura T și presiunea p egală cu presiunea atmosferică. Masa totală este M . Pistonul are secțiunea S și poate aluneca fără frecări, iar cilindrul are coeficientul de frecare μ cu planul orizontal. Lungimea cilindrului ocupată de gaz este l . Pistonul este prins printr-un resort, de constantă k , inițial nedeformat, de un perete. De câte ori trebuie mărită temperatura T a gazului pentru ca volumul său să crească de n ori ?

Rezolvare. Forța de frecare maximă este μMg când apare alunecarea.

a) Să presupunem întâi că cilindrul *nu* alunecă. Atunci masa de gaz suferă transformarea **generală** :

$$p S l / T = p' S \cdot n l / T' \rightarrow T' / T = n \cdot p' / p. \quad (1)$$

Pe de altă parte, condiția de **echilibru mecanic** a pistonului este :

$$p' S = p S + k(n l - l) \rightarrow p' = p + k l (n - 1) / S. \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă

$$T' / T = n \cdot [1 + (n - 1)k l / (p S)]. \quad (3)$$

Pentru a nu aluneca forța cu care este împins cilindrul trebuie să fie mai mică decât forța de frecare statică (de aderență) **maximă** :

$$k(n l - l) < \mu Mg. \quad (4)$$

b) Dacă condiția (4) nu este îndeplinită, deci dacă $k(n l - l) > \mu Mg$, atunci cilindrul la început nu va aluneca și va începe să alunece la o lungime a coloanei de aer l_1 :

$$k(l_1 - l) = \mu Mg. \quad (5)$$

În acest moment condiția de echilibru a pistonului este

$$p_1 S = p S + k(l_1 - l). \quad (6)$$

Din (5), (6) rezultă

$$(p_1 - p)S = \mu Mg. \quad (7)$$

Până în momentul începerii alunecării transformarea este **generală**:

$$\rho S \ell / T = \rho_1 S \ell_1 / T_1 \rightarrow T_1 / T = \rho_1 \ell_1 / (\rho \ell) =$$

$$= [(\rho + \mu Mg / S) : \rho] \cdot [(\ell + \mu Mg / k) : \ell]. \quad (8)$$

Din momentul lunecării presiunea rămâne *constantă*, fiindcă la orice tendință de creștere a presiunii (prin încălzire) cilindrul va aluneca la stânga. Deci mai departe avem o transformare *izobară* :

$$T' / T_1 = S \cdot n \ell / (S \ell_1) = n \ell : (\ell + \mu Mg / k). \quad (9)$$

Raportul final al temperaturilor :

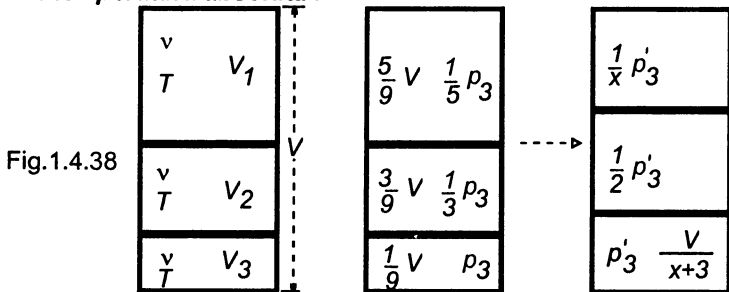
$$T' / T = (T' / T_1) \cdot (T_1 / T) = n \cdot (\rho + \mu Mg / S) : \rho. \quad (10)$$

1.4.37. Într-un cilindru orizontal alunecă etanș fără frecări $n - 1$ pistoane care împart cilindrul în n compartimente conținând gaze respectiv cu masele m_1, m_2, \dots , masele molare μ_1, μ_2, \dots și temperaturile T_1, T_2, \dots . Aflați în ce rapoarte sunt volumele .

Rezolvare. La echilibru presiunea peste tot trebuie să fie aceeași. Ecuațiile de stare pentru fiecare compartiment sunt

$$\rho V_i = (m_i / \mu_i) RT_i \rightarrow V_1 : V_2 : \dots = (m_1 T_1 / \mu_1) : (m_2 T_2 / \mu_2) : \dots$$

1.4.38. Într-un cilindru vertical închis se află două pistoane care se pot mișca etanș fără frecări. În fiecare compartiment se află același număr de moli de gaz ideal. La o anumită temperatură avem $V_1 : V_2 : V_3 = 5 : 3 : 1$. Mărind temperatura obținem $V_1' : V_2' : V_3' = x : 2 : 1$. Aflați x și de câte ori a crescut temperatura absolută .



Rezolvare. Conform ecuațiilor de stare :

$$\rho_i = \nu RT / V_i \rightarrow \rho_1 : \rho_2 : \rho_3 = (1/V_1) : (1/V_2) : (1/V_3) = (1/5) : (1/3) : (1/1); \quad (1)$$

$$\rho_1' : \rho_2' : \rho_3' = (1/V_1') : (1/V_2') : (1/V_3') = (1/x) : (1/2) : (1/1). \quad (2)$$

Observăm acum că diferența de presiune de o parte și de alta a unui piston trebuie să fie egală cu presiunea exercitată de piston datorită greutății sale, deci putem scrie:

$$p_3 - p_3/3 = p_3' - p_3'/2 \rightarrow p_3' = 4p_3/3, \quad (3)$$

$$p_3/3 - p_3/5 = p_3'/2 - p_3'/x = (1/2 - 1/x) 4p_3/3 \rightarrow$$

$$1/3 - 1/5 = (1/2 - 1/x) 4/3 \rightarrow x = 5/2. \quad (4)$$

În sfârșit ecuațiile de stare ne dau :

$$p_3 \cdot V/9 = \nu RT, \quad p_3' \cdot V/(x+3) = \nu RT, \quad (5)$$

$$T'/T = [3/(x+3)] \cdot p_3'/p_3 = [9/(x+3)] \cdot 4/3 = 24/11. \quad (6)$$

1.4.39. În montajul din figură lungimea cilindrului $L = 80$ cm , iar pistonul se mișcă etanș fără frecări. La temperatura $T_1 = 300$ K , $x_1 = 40$ cm , iar la $T_2 = 500$ K , $x_2 = 50$ cm . Care este lungimea ℓ_0 a resortului nedeformat ? Ce valoare are x la temperatura heliului lichid ?

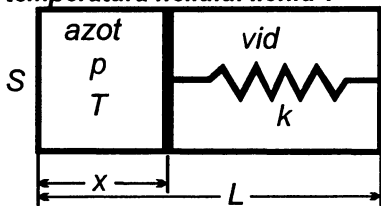


Fig.1.4.39

Rezolvare. Presiunea la care se găsește gazul este dată de forța elastică a resortului comprimat :

$$p = k [\ell_0 - (L - x)] : S. \quad (1)$$

Scriem **ecuația de stare** pentru cele două stări :

$$[k (\ell_0 - L + x_1) / S] \cdot Sx_1 = \nu RT_1, \quad [k (\ell_0 - L + x_2) / S] \cdot Sx_2 = \nu RT_2, \quad (2)$$

Prin împărțirea ecuațiilor membru la membru, obținem

$$(\ell_0 - L + x_1) : (\ell_0 - L + x_2) = (T_1 / T_2) (x_2 / x_1) \rightarrow$$

$$\rightarrow \ell_0 = [(L - x_1)x_1T_2 - (L - x_2)x_2T_1] : (x_1T_2 - x_2T_1) = 70 \text{ cm}. \quad (3)$$

La temperatura heliului lichid azotul *îngheață* și ocupă un volum *neglijabil*, iar vaporii săi saturați au o presiune *neglijabilă*, de aceea, practic, resortul va rămâne *nedeformat* :

$$x = L - \ell_0 = 10 \text{ cm}. \quad (4)$$

1.4.40. Un balon de volum $V = 100$ L este umplut cu un gaz la presiunea $p = 110,5$ kPa și temperatura $t_1 = 27^\circ\text{C}$. Încălzind balonul până la $t_2 = 127^\circ\text{C}$ masa sa a scăzut cu $m = 27,3$ g din cauză că a ieșit gaz afară printr-o supapă. Aflați densitatea gazului în condiții normale.

Rezolvare. Scriem **ecuația de stare** pentru cele două situații :

$$\rho V = (m_1 / \mu) RT_1, \quad \rho V = [(m_1 - m) / \mu] RT_2 \rightarrow \quad (1)$$

$$\mu = [mR / (\rho V)] \cdot T_1 T_2 / (T_2 - T_1) . \quad (2)$$

Dar densitatea este dată de formula cunoscută :

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \mu \rho_0 / (RT_0) = [\rho_0 / (RT_0)] [mR / (\rho V)] \cdot T_1 T_2 / (T_2 - T_1) = \\ &= (m / V) (\rho_0 / \rho) \cdot T_1 T_2 / [T_0 (T_2 - T_1)] = 1,1 \text{ kg/m}^3 . \end{aligned} \quad (3)$$

1.4.41. Un balon de volum $V = 1,00 \text{ L}$ este vidat la temperatura ambiantă constantă, astfel încât presiunea gazului scade cu $\Delta p = 78 \text{ kPa}$, iar masa balonului cu gaz scade cu $\Delta m = 1,00 \text{ g}$. Aflați densitatea gazului la presiunea normală și la temperatura ambiantă .

Rezolvare. Scriem ecuația de stare pentru cele două situații :

$$\rho V = (m / \mu) RT, \quad (\rho - \Delta \rho) V = [(m - \Delta m) / \mu] RT \rightarrow \quad (1)$$

$$\Delta \rho \cdot V = (\Delta m / \mu) RT, \quad \mu / (RT) = \Delta m / (V \cdot \Delta \rho) . \quad (2)$$

Dar densitatea este dată de formula cunoscută :

$$\rho = \mu \rho_0 / (RT) = (\Delta m / V) \cdot \rho_0 / \Delta p = 1,3 \text{ kg/m}^3 . \quad (3)$$

1.4.42. O cantitate de plută și o cantitate de plumb cântăresc în aer la fel : $G = 1000 \text{ N}$. Care este diferența de masă dintre plută și plumb, dacă temperatura aerului este $t = 27^\circ\text{C}$ și presiunea $p = 100 \text{ kPa}$?

Rezolvare. Greutatea (aparentă a) unui corp cântărit în aer (ținând seama de forța arhimedică):

$$G = mg - F_A = mg(1 - \rho_{\text{aer}} / \rho_{\text{corp}}) , \quad (1)$$

$$m = (G / g) [1 : (1 - \rho_{\text{aer}} / \rho_{\text{corp}})] (G / g) (1 + \rho_{\text{aer}} / \rho_{\text{corp}}) , \quad (2)$$

deoarece $\rho_{\text{aer}} \ll \rho_{\text{corp}}$. Diferența de masă va fi în cazul nostru :

$$\Delta m \approx (G / g) \rho_{\text{aer}} (1 / \rho_1 - 1 / \rho_2) = (G / g) \rho_{\text{aer}} (\rho_2 - \rho_1) : (\rho_1 \rho_2) . \quad (3)$$

Densitatea aerului se poate calcula în două moduri :

$$\rho_{\text{aer}} = \mu_{\text{aer}} \rho / (RT) = 1,17 \text{ kg/m}^3 \quad (4)$$

sau cu formula

$$\rho_{\text{aer}} = \rho_0 \cdot p T_0 / (p_0 T) , \quad \text{unde } \rho_0 = 1,293 \text{ kg/m}^3 . \quad (5)$$

Prin urmare,

$$\Delta m \approx (G / g) \rho_{\text{aer}} (\rho_2 - \rho_1) : (\rho_1 \rho_2) = 0,53 \text{ kg} . \quad (6)$$

1.4.43. Un corp este cântărit cu un dinamometru în aer la presiunea $H = 100 \text{ kPa}$ și temperatura $t = 27^\circ\text{C}$. Când temperatura aerului a crescut cu $\Delta_1 T = 10 \text{ K}$, greutatea (aparentă a) corpului a crescut cu $\Delta G = 10 \text{ mN}$. Cu cât se schimbă greuta-

tea corpului dacă temperatura crește cu $\Delta_2 T = 15$ K, iar presiunea crește cu $\Delta H = 5,0$ kPa ?

Rezolvare. Greutatea (aparentă a) unui corp cântărit în aer este (neglijăm variația densității corpului):

$$G = mg - \rho_{\text{aer}} \cdot V_{\text{corp}} \cdot g \rightarrow \Delta G = - V_{\text{corp}} g \Delta \rho_{\text{aer}}. \quad (1)$$

Dar densitatea gazelor este dată de formula cunoscută :

$$\rho = \mu p / (RT). \quad (2)$$

Atunci pentru cele două cântăriri avem :

$$\begin{aligned} \Delta_1 G &= - V_{\text{corp}} g \{ \mu H : [R(T + \Delta_1 T)] - \mu H : (RT) \} = \\ &= V_{\text{corp}} g (\mu H / R) \cdot \Delta_1 T : [T(T + \Delta_1 T)]; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 G &= V_{\text{corp}} g (\mu / R) [H / T - (H + \Delta H) : (T + \Delta_2 T)] = \\ &= V_{\text{corp}} g (\mu / R) (H \Delta_2 T - T \Delta H) : [T(T + \Delta_2 T)]; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Delta_2 G = \Delta_1 G \cdot [(T + \Delta_1 T) : (T + \Delta_2 T)] \cdot (H \Delta_2 T - T \Delta H) : (H \Delta_1 T) = 0. \quad (5)$$

1.4.44. Un corp se află în aer în condiții normale. Scăzând presiunea la $p_1 = 100$ kPa și măbind temperatura aerului la $t_1 = 60^\circ\text{C}$, greutatea aparentă a corpului crește cu $\Delta G_1 = 20$ mN. Cu cât se schimbă greutatea corpului dacă mărim temperatura la $t_2 = 50^\circ\text{C}$ și presiunea la $p_2 = 800$ torr ?

Rezolvare. Greutatea aparentă în cele 3 cazuri se scrie :

$$G_0 = mg - \rho_0 Vg, \quad G_1 = mg - \rho_1 Vg = mg - \rho_0 [p_1 T_0 / (\rho_0 T_1)] Vg,$$

$$G_2 = mg - \rho_2 Vg = mg - \rho_0 [p_2 T_0 / (\rho_0 T_2)] Vg, \quad (1)$$

De aici rezultă creșterile de greutate :

$$\begin{aligned} \Delta G_1 &= \rho_0 Vg [1 - p_1 T_0 / (\rho_0 T_1)], \quad \Delta G_2 = \rho_0 Vg [1 - p_2 T_0 / (\rho_0 T_2)] = \\ &= \Delta G_1 \cdot [1 - p_2 T_0 / (\rho_0 T_2)] : [1 - p_1 T_0 / (\rho_0 T_1)] = 60 \text{ mN}. \end{aligned} \quad (2)$$

1.4.45. Un balon de volum $V = 7,8$ m³ este prins de un fir. Cu cât se schimbă tensiunea din fir dacă temperatura aerului coboară de la $t_1 = 27^\circ\text{C}$ la $t_2 = -13^\circ\text{C}$ și presiunea atmosferică scade de la $H_1 = 100$ kPa la $H_2 = 98$ kPa ?

Rezolvare. Tensiunea din fir trebuie să echilibreze forța ascensională :

$$\begin{aligned} F &= \rho Vg - mg, \quad \Delta F = Vg \Delta \rho = Vg [\mu H_2 / (RT_2) - \mu H_1 / (RT_1)] = \\ &= Vg \cdot (\mu / R) (H_2 / T_2 - H_1 / T_1) = 11,6 \text{ N}. \end{aligned}$$

1.4.46. Într-un tub barometric a intrat puțin aer la temperatura $t = 17^\circ\text{C}$ și presiunea atmosferică $H = 101,6$ kPa. Lungi-

mea coloanei de mercur fiind $h = 50$ cm. Care este densitatea aerului din camera barometrică ?

Rezolvare. Presiunea atmosferică H echilibrează presiunea aerului p din camera barometrică plus presiunea hidrostatică a coloanei de mercur ρgh :

$$H = p + \rho gh \rightarrow p = H - \rho gh. \quad (1)$$

Aplicăm formula cunoscută a densității gazelor:

$$\rho_{\text{aer}} = \mu p / (RT) = \mu (H - \rho gh) / (RT) = 0,42 \text{ kg/m}^3. \quad (2)$$

1.4.47. În camera barometrică a fost introdusă o cantitate de gaz, astfel încât lungimea coloanei de mercur a devenit $h = 60$ cm. Introducând încă o cantitate egală de gaz, coloana de mercur a coborât cu $\Delta h = 15$ cm. Aflați presiunea atmosferică.

Rezolvare. Presiunea atmosferică H echilibrează presiunea hidrostatică a coloanei de mercur, ρgh , plus presiunea gazului din camera barometrică: $H = \rho gh + p$. Scriem ecuația de stare pentru gaz în cele două cazuri:

$$(H - \rho gh) \cdot \ell S = \nu RT, \quad [H - \rho g(h - \Delta h)] \cdot (\ell + \Delta h) S = 2\nu RT. \quad (1)$$

Împărțim ecuația a doua la prima :

$$\begin{aligned} \{ [H - \rho g(h - \Delta h)] : (H - \rho gh) \} \cdot (\ell + \Delta h) : \ell &= 2 \\ \rightarrow H = \rho g(h + \Delta h) &= 100 \text{ kPa}. \end{aligned} \quad (2)$$

**** 1.4.48. Calculați masa de aer de volum $V = 86$ L , cuprinsă între geamurile unei ferestre. Presupunem că temperatura variază liniar de la $t_1 = -23^\circ\text{C}$ (afară) până la $t_2 = 27^\circ\text{C}$ în cameră, iar presiunea este normală. La ce distanță de geamul exterior un plan paralel separă mase egale de aer de o parte și de alta?**

Rezolvare. $T = T_1 + ax$, dar pentru $x = b$ avem $T = T_2$, deci $T_2 = T_1 + a \cdot b$, de unde constanta a : $a = (T_2 - T_1) : b$. (1)

Să considerăm un strat infinit de subțire, de grosime dx , aflat la distanța x de afară. Atunci masa de aer elementară cuprinsă în acest volum elementar :

$$dm = \rho dV = [\mu p / (RT)] S dx = \{ \mu p / [R(T_1 + ax)] \} S dx. \quad (2)$$

Prin integrare nedefinită :

$$m(x) = \int dm = \int \frac{\mu p S dx}{R(T_1 + ax)} = \frac{\mu p S}{Ra} [\ln(T_1 + ax) + C], \quad (3)$$

unde constanta de integrare se determină din condiția la margine: pentru $x = 0$, avem $m(0) = 0$; $0 = \ln T_1 + C$,

$$C = - \ln T_1 = \ln(1 / T_1), \text{ deci}$$

$$m(x) = \frac{\mu\rho S}{R'a} \ln \frac{T+ax}{T_1} = \frac{\mu\rho S b}{R(T_2-T_1)} \ln \left(1 + \frac{T_2-T_1}{T_1} \frac{x}{b} \right) =$$

$$= \frac{\mu\rho V}{R(T_2-T_1)} \ln \left(1 + \frac{T_2-T_1}{T_1} \frac{x}{b} \right).$$

Se poate integra și *definit* (limitele de integrare se corespund):

$$m(x) = \int_0^x dm(x) = \int_0^x \frac{\mu\rho S dx}{R(T_1+ax)} = \frac{\mu\rho S}{Ra} \int_0^x \frac{adx}{T_1+ax} =$$

$$= \frac{\mu\rho S}{Ra} \ln \frac{T_1+ax}{T_1} = \frac{\mu\rho V}{R(T_2-T_1)} \ln \left(1 + \frac{T_2-T_1}{T_1} \frac{x}{b} \right).$$

Masa totală se obține imediat punând $x = b$:

$$m = \{ \mu\rho V : [R(T_2 - T_1)] \} \ln(T_2/T_1) = 106 \text{ g} .$$

Calculul cu temperatura *medie* (aritmetică) dă în cazul nostru, practic, același rezultat:

$$m = 2 \mu\rho V : [R(T_2 - T_1)] = 105 \text{ g} .$$

Distanța cerută se obține din condiția : $m(\delta) = m/2$ sau

$$\{ \mu\rho V : [R(T_2 - T_1)] \} \ln \{ 1 + [(T_2 - T_1)/T_1] \cdot \delta/b \} =$$

$$= (1/2) \{ \mu\rho V : [R(T_2 - T_1)] \} \ln (T_2/T_1) ,$$

de unde

$$\delta = b \frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}} = \frac{b}{1 + \sqrt{T_2/T_1}} = 0,477 b .$$

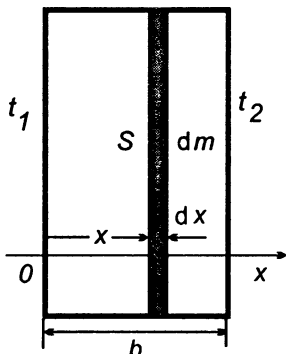


Fig.1.4.48

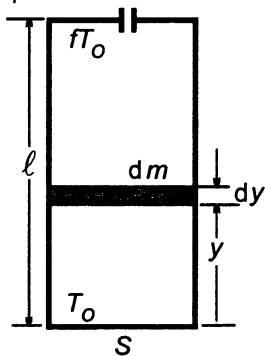


Fig.1.4.49

**** 1.4.49. Un cilindru vertical de lungime $\ell = 100$ cm , având un mic orificiu de comunicare cu atmosfera, conține la temperatura T_0 o masă $m_0 = 10,0$ g de aer. Datorită unui radiator electric cilindrul se încălzește astfel încât temperatura lui crește liniar de la T_0 la baza cilindrului până la $T' = f T_0$, $f = 2,00$, la vârf. Aflați masa de aer din cilindru și înălțimea la care se află CM (centrul de masă) al acestei mase de aer. La ce înălțime un plan orizontal separă mase egale de aer de o parte și de alta ?**

Rezolvare. $T = T_0 + ay$, unde constanta a se determină din

condiția ca pentru $y = \ell$ să avem $T' = f T_0$:

$$T' = f T_0 = T_0 + a\ell , \text{ de unde } a = (T' - T_0) / \ell = (f - 1)T_0 / \ell . \quad (1)$$

Masa inițială :

$$m_0 = \mu p V / (RT_0) = \mu p S \ell / (RT_0) . \quad (2)$$

Să considerăm un strat orizontal *infini*t de subțire de grosime dy aflat la înălțimea y . Masa sa :

$$dm = \rho dV = [\mu p / (RT)] S dy = \{ \mu p S / [R(T_0 + ay)] \} dy \quad (3)$$

Prin integrare definită (limitele de integrare se corespund):

$$\begin{aligned} m(y) &= \int_0^y dm(y) = \int_0^y \frac{\mu p S dy}{R(T_0 + ay)} = \frac{\mu p S}{Ra} \int_0^y \frac{ady}{T_0 + ay} = \\ &= [\mu p S / (Ra)] \ln [(T_0 + ay) / T_0] = \\ &= \{ \mu p S \ell / [R(T' - T_0)] \} \ln \{ 1 + [(T' - T_0) / T_0] \cdot y / \ell \} = \\ &= [m_0 / (T' / T - 1)] \ln \{ 1 + [(T' - T_0) / T_0] \cdot y / \ell \} = \\ &= [m_0 / (f - 1)] \ln [1 + (f - 1) \cdot y / \ell] . \end{aligned} \quad (4)$$

Se poate integra și nedefinit :

$$\int dm = m(y) = \int \frac{\mu p S dy}{R(T_0 + ay)} = \frac{\mu p S}{Ra} [\ln(T_0 + ay) + C] ,$$

unde constanta de integrare se determină din *condiția la margine*: pentru $y = 0$ avem $m(0) = 0$, deci $0 = \ln T_0 + C$, $C = - \ln T_0$, etc.

Masa totală se obține punând $y = \ell$:

$$m = [m_0 / (f - 1)] \ln f = 6,93 \text{ g} . \quad (5)$$

Coordonata CM este prin definiție :

$$y_{\text{cm}} = \frac{1}{m} \int y dm = \frac{1}{m} \int_0^\ell y \rho S dy = \frac{1}{m} \int_0^\ell \frac{\mu p S}{RT} y dy = \frac{\mu p S}{m Ra} \int_0^\ell \frac{ay dy}{T_0 + ay} .$$

Integrala se calculează astfel :

$$\int_0^{\ell} \frac{(ay + T_0 - T_0)dy}{T_0 + ay} = \int_0^{\ell} dy - T_0 \int_0^{\ell} \frac{dy}{T_0 + ay} =$$

$$= \ell - (T_0/a) \ln [(T_0 + a\ell) / T_0] = \ell - [\ell / (f - 1) \ln f .$$

Rezultă atunci :

$$y_{cm} = \ell \cdot \{m_0 / [m(f - 1)]\} [1 - (\ln f) : (f - 1)] =$$

$$= \ell \cdot [1 / \ln f - 1 / (f - 1)] = 44 \text{ cm} . \quad (6)$$

Înălțimea h la care un plan orizontal împarte cilindrul în două jumătăți cu mase egale de aer se obține din condiția: $m(h) = m / 2$

sau $[m_0 / (f - 1)] \ln [1 + (f - 1) \cdot h / \ell] = m_0 / 2$,

de unde

$$h = [\ell / (f - 1)] (e^{(f-1)/2} - 1) = 0,65 \text{ m} . \quad (7)$$

* * *

1.5. Amestecuri de gaze

1.5.1. Densitatea unui amestec de He și N₂ la temperatura $t = 27^\circ\text{C}$ și presiunea $p = 100 \text{ kPa}$ este $\rho = 1,00 \text{ kg/m}^3$. Aflați : a) Concentrația atomilor de He și a moleculelor de N₂. b) Presiunile parțiale și fracțiunile molare.

Rezolvare. a) Fie $m_{1,2} = \mu_{1,2} / N_A$ masele moleculelor respective. Atunci masa unității de volum = densitatea se exprimă cu ajutorul concentrațiilor astfel :

$$\rho = n_1 m_1 + n_2 m_2 = (n_1 \mu_1 + n_2 \mu_2) / N_A . \quad (1)$$

Pe de altă parte, presiunea se exprimă cu ajutorul concentrațiilor :

$$p = n_1 kT + n_2 kT = (n_1 + n_2) RT / N_A . \quad (2)$$

Din aceste două ecuații rezultă :

$$n_1 = [1 / (\mu_2 - \mu_1)] [\mu_2 \rho / (RT) - \rho] N_A = 3,0 \cdot 10^{24} \text{ m}^{-3} ,$$

$$n_2 = [1 / (\mu_2 - \mu_1)] [\rho - \mu_1 \rho / (RT)] N_A = 1,0 \cdot 10^{24} \text{ m}^{-3} . \quad (3)$$

b) Presiunile parțiale sunt :

$$p_{1,2} = n_{1,2} kT \quad \text{dar} \quad p = (n_1 + n_2) kT, \quad (4)$$

$$p_1 = p \cdot n_1 / (n_1 + n_2) = 75 \text{ kPa} , \quad p_2 = p \cdot n_2 / (n_1 + n_2) = 25 \text{ kPa}. \quad (5)$$

Știind că numărul de molecule $N = \nu N_A$, $N = nV$, fracțiunile molare sunt:

$$x_1 = \nu_1 / (\nu_1 + \nu_2) = N_1 / (N_1 + N_2) = n_1 / (n_1 + n_2) = 0,75 ,$$

$$x_2 = \nu_2 / (\nu_1 + \nu_2) = N_2 / (N_1 + N_2) = n_2 / (n_1 + n_2) = 0,25 , \quad (6)$$

1.5.2. Densitățile a două gaze la o anumită temperatură și presiune sunt respectiv $\rho_1 = 1,20 \text{ kg/m}^3$, $\rho_2 = 0,80 \text{ kg/m}^3$. Se amestecă mase egale din cele două gaze. Care va fi densitatea amestecului la aceeași temperatură și presiune ?

Rezolvare. Densitățile date se scriu :

$$\rho_1 = \mu_1 \rho / (RT) , \quad \rho_2 = \mu_2 \rho / (RT) . \quad (1)$$

Pe de altă parte, ecuația de stare pentru amestec este

$$pV = (m / \mu_1 + m / \mu_2) RT \rightarrow m = [pV / (RT)] [(1 / \mu_1 + 1 / \mu_2)] . \quad (2)$$

Dar densitatea amestecului este

$$\begin{aligned} \rho &= 2m / V = 2[p / (RT)] [(1 / \mu_1 + 1 / \mu_2)] = \\ &= 2 : [RT / (\mu_1 \rho) + RT / (\mu_2 \rho)] = \end{aligned}$$

$$= 2 : (1 / \rho_1 + 1 / \rho_2) = 2 \rho_1 \rho_2 / (\rho_1 + \rho_2) = 0,96 \text{ kg/m}^3. \quad (3)$$

1.5.3. Densitatea aerului în condiții normale este $\rho_0 = 1,293 \text{ kg/m}^3$. Considerând aerul format numai din O_2 și N_2 (celelalte gaze sunt în cantități neglijabile), aflați compoziția masică și volumică (fracțiunile molare) a aerului.

Rezolvare. Fie fracțiunile masice $g_{1,2} = m_{1,2} / m$, atunci putem scrie pentru presiunea aerului :

$$\begin{aligned} p &= (m_1 / \mu_1 + m_2 / \mu_2) RT / V = (g_1 m / \mu_1 + g_2 m / \mu_2) RT / V = \\ &= \rho (g_1 / \mu_1 + g_2 / \mu_2) RT, \end{aligned} \quad (1)$$

dar $g_1 + g_2 = 1$, atunci rezultă :

$$g_1 = [\mu_1 / (\mu_1 - \mu_2)] [1 - \mu_2 \rho / (\rho RT)] = 26 \% , \quad (2)$$

$$g_2 = [\mu_2 / (\mu_1 - \mu_2)] [\mu_1 \rho / (\rho RT) - 1] = 74 \% , \quad (3)$$

Fracțiunile volumice coincid la gaze cu fracțiunile molare :

$$r_i = V_i / V = (V_i / V_\mu) : (V / V_\mu) = v_i / v = v_i / \sum v_k = x_i. \quad (4)$$

Pe de altă parte,

$$x_i = v_i / v = (m_i / \mu_i) : (m / \mu_a) = (g_i / \mu_i) : (\sum g_k / \mu_k). \quad (5)$$

În cazul problemei :

$$x_1 = (g_1 / \mu_1) : (g_1 / \mu_1 + g_2 / \mu_2) = r_1 = 23,5 \% ,$$

$$x_2 = (g_2 / \mu_2) : (g_1 / \mu_1 + g_2 / \mu_2) = r_2 = 76,5 \% . \quad (6)$$

1.5.4. Două baloane identice conțin la temperatura $T = 300 \text{ K}$, respectiv O_2 la presiunea $p_1 = 70 \text{ kPa}$ și He la $p_2 = 250 \text{ kPa}$

Se pompează tot heliul din al doilea balon în primul. Ce densitate va avea amestecul din primul balon (la aceeași temperatură) ?

Rezolvare. Scriem ecuația de stare pentru fiecare balon în starea inițială :

$$p_1 V = (m_1 / \mu_1) RT, \quad p_2 V = (m_2 / \mu_2) RT. \quad (1)$$

Atunci densitatea amestecului va fi

$$\begin{aligned} \rho &= (m_1 + m_2) / V = \mu_1 p_1 / (RT) + \mu_2 p_2 / (RT) = \\ &= [1 / (RT)] (\mu_1 p_1 + \mu_2 p_2) = 1,30 \text{ kg/m}^3. \end{aligned} \quad (2)$$

1.5.5. Două vase diferite conțin câte o masă egală din același gaz la presiunea $p_1 = 40 \text{ kPa}$, respectiv $p_2 = 60 \text{ kPa}$. Ce presiune se va stabili în vase dacă le unim printr-un mic tub ? Temperatura este constantă. Dar în cazul general când sunt n vase diferite care conțin câte o masă egală din același gaz la presiunile p_i ?

Rezolvare. În starea finală presiunea în toate vasele va fi aceeași p' , atunci

$$p_i V_i = (m / \mu) RT \rightarrow V_i = mRT / (\mu p_i), \quad (1)$$

$$p' \sum V_i = (n m / \mu) RT = p' \sum [mRT / (\mu p_i)], \quad p' = n : \sum (1 / p_i). \quad (2)$$

Pentru cele două vase :

$$p' = 2 : (1 / p_1 + 1 / p_2) = 2 p_1 p_2 : (p_1 + p_2) = 48 \text{ kPa}. \quad (3)$$

1.5.6. Un număr n de vase de volume V_i , $i = 1, 2, \dots, n$, conțin gaze diferite la presiunile p_i și la aceeași temperatură. Ce presiune rezultantă se stabilește dacă unim vasele între ele ?

Rezolvare. Numărul de particule sau numărul de moli într-un gaz este determinat de parametrii p , V , T și nu depinde de natura lor:

$$v = pV / (RT), \quad N = v N_A = pV / (kT), \quad (1)$$

de aceea la amestecarea gazelor - dacă nu se produc reacții chimice între gaze care pot duce la schimbarea numărului de molecule - putem scrie **conservarea numărului de particule sau numărului de moli (sau a raportului pV / T)**:

$$\sum v_i = v \quad \text{sau} \quad \sum [p_i V_i / (RT)] = p' [1 / (RT)] \sum V_k$$

$$p' = \sum (p_i V_i) / \sum V_k. \quad (2)$$

1.5.7. În n vase diferite se află respectiv masele m_i , $i = 1, 2, \dots, n$, de gaze diferite cu masele molare μ_i , la presiunile p_i și la aceeași temperatură. Ce presiune se stabilește în vase dacă le unim ?

$$\text{Rezolvare. } p_i V_i = v_i RT \rightarrow V_i = v_i RT / p_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

$$p' \sum V_i = \sum v_k RT, \quad p' \cdot \sum (v_i RT / p_i) = \sum (v_k RT), \quad (2)$$

$$p' = (\sum v_k) : [\sum (v_i / p_i)] = [\sum (m_k / \mu_k)] : \{\sum [m_i / (\mu_i p_i)]\}. \quad (3)$$

1.5.8. Un număr n de vase cu volumele V_i , $i = 1, \dots, n$, conțin gaze diferite la presiunile p_i . Vasele sunt termostatate la temperaturile T_i . Ce presiune finală de echilibru se stabilește în vase dacă le unim ?

Rezolvare. Scriem conservarea numărului de moli:

$$\sum v_i = v \quad \text{sau} \quad \sum [p_i V_i / (RT)] = \sum [p' V_k / (RT_k)], \quad (1)$$

$$p' = [\sum (p_i V_i / T_i)] : [\sum (V_k / T_k)]. \quad (2)$$

1.5.9. În n vase de volume egale se află gaze diferite la temperaturile T_i , $i = 1, \dots, n$, și presiunile p_i . Vasele sunt puse

în legătură între ele și încălzite până la temperaturile T_i' . Aflați presiunea finală la echilibru.

Rezolvare. Scriem conservarea numărului de moli :

$$\sum [p_i V / (RT_i)] = \sum [p' V / (RT_k')] \rightarrow p' = [\sum (p_i / T_i)] : [\sum (1 / T_k')] \quad (1)$$

În particular, dacă temperatura finală este unică T' :

$$p' = (T' / n) \sum (p_i / T_i) \quad (2)$$

1.5.10. Un număr de n vase de volume $V_i, i = 1, \dots, n$, care comunică între ele, conțin gaz la temperatura T și presiunea p . Cât devine presiunea dacă termostatăm vasele respectiv la temperaturile $T_i, i = 1, \dots, n$?

Rezolvare. Scriem conservarea numărului de moli:

$$\sum [p V_i / (RT)] = \sum [p' V_k / (RT_k)] \rightarrow p' = (p / T) \cdot (\sum V_i) : [\sum (V_k / T_k)]$$

1.5.11. Un vas de volum $V_1 = 3,0$ L conținând gaz la temperatura $t = 17^\circ\text{C}$ și presiunea normală, este legat printr-un tub scurt cu un alt vas de volum $V_2 = 7,0$ L vidat. În tubul de legătură există un ventil care permite trecerea gazului din vasul 1 în vasul 2 dacă presiunea din 1 depășește presiunea din 2 cu $\Delta p = 39,7$ kPa. Aflați presiunea din vasul 2 dacă ambele vase sunt încălzite până la $t' = 127^\circ\text{C}$.

Rezolvare. Presiunile finale trebuie să satisfacă condiția impusă de ventil: $p_1' - p_2' = \Delta p$. Scriem conservarea numărului de moli :

$$v_1 + 0 = v_1' + v_2' \quad \text{sau}$$

$$p_0 V_1 / (RT) = (p_2' + \Delta p) V_1 / (RT') + p_2' V_2 / (RT') \quad (1)$$

$$p_2' = [V_1 / (V_1 + V_2)] (p_0 T' / T - \Delta p) = 30 \text{ kPa} \quad (2)$$

1.5.12. Într-un vas de volum $V = 8,31$ L s-a introdus inițial oxigen de masă $m_1 = 3,2$ g, apoi o masă $m_2 = 4,4$ g de CO_2 . Aflați presiunea finală după comprimarea amestecului la volumul $V/n, n = 3,0$ și încălzirea amestecului până la temperatura $T = 300$ K.

Rezolvare. Scriem ecuația de stare pentru amestec în starea finală :

$$p' \cdot V / n = (m_1 / \mu_1 + m_2 / \mu_2) RT,$$

$$p' = (nRT / V)(m_1 / \mu_1 + m_2 / \mu_2) = 180 \text{ kPa}.$$

1.5.13. Un vas de volum $V = 2,00$ L este împărțit în două compartimente egale, A și B, printr-o membrană semipermeabilă. În compartimentul A se introduc $m_1 = 0,20$ g H_2 și

$m_2 = 0,70 \text{ g N}_2$, iar în celălalt compartiment se face vid. Încălzind sistemul până la temperatura $T = 500 \text{ K}$, membrana devine permeabilă pentru H_2 . Care va fi presiunea finală în compartimente?

Rezolvare. La temperatura T hidrogenul va ocupa uniform întregul volum, deci jumătate din numărul de moli de H_2 vor trece în vasul B:

$$p_A V/2 = [m_1 / (2\mu_1) + m_2 / \mu_2]RT, \quad p_B V/2 = [m_1 / (2\mu_1)]RT, \quad (1)$$

$$p_A = [m_1 / (2\mu_1) + m_2 / \mu_2] RT / (V/2) = 300 \text{ kPa},$$

$$p_B = [m_1 / (2\mu_1)]RT / (V/2) = 200 \text{ kPa}. \quad (2)$$

1.5.14. Două vase, legate printr-un tub scurt cu robinet, conțin aer la temperaturi egale. În primul vas presiunea este $p_1 = 40 \text{ kPa}$ și volumul vasului este de $n = 3,0$ ori mai mare decât volumul celui de-al doilea. Masa aerului din al doilea vas este de $r = 5,0$ ori mai mare decât în primul. Ce presiune se stabilește în vase dacă deschidem robinetul ?

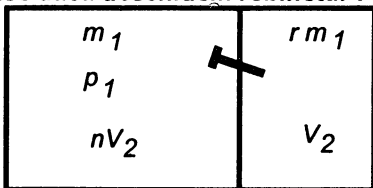


Fig.1.5.14

Rezolvare. Scriem conservarea numărului de moli:

$$v_1 + r v_1 = (1 + r) \cdot p_1 \cdot nV_2 / (RT) = v' = p' \cdot (nV_2 + V_2) / (RT),$$

$$p' = p_1 \cdot (1 + r) n / (n + 1) = (9/2) p_1 = 180 \text{ kPa}.$$

1.5.15. În două vase de volume $V_1 = 10,0 \text{ L}$, $V_2 = 20,0 \text{ L}$ se află oxigen, respectiv la temperaturile $T_1 = 300 \text{ K}$, $T_2 = 290 \text{ K}$ și presiunile $p_1 = 100 \text{ kPa}$, $p_2 = 200 \text{ kPa}$. Vasele se pun în legătură printr-un mic tub cu robinet. Ce masă de gaz trece dintr-un vas în celălalt după deschiderea robinetului, dacă vasele rămân în continuare termostatare la aceleași temperaturi inițiale ?

Rezolvare Scriem conservarea numărului de moli:

$$v_1 + v_2 = v_1' + v_2' \rightarrow p_1 V_1 / T_1 + p_2 V_2 / T_2 = p' V_1 / T_1 + p' V_2 / T_2. \quad (1)$$

Numărul de moli de gaz care trec din vasul 2 (unde presiunea este mai mare) în vasul 1 este evident :

$$\Delta v = v_2 - v_2' = p_2 V_2 / (RT_2) - p' V_2 / (RT_2). \quad (2)$$

Înlocuind aici p' (1) găsim masa transferată :

$$m = \Delta v \cdot \mu = \mu V_1 V_2 (p_2 - p_1) : [R(V_1 T_2 + V_2 T_1)] = 8,1 \text{ g}. \quad (3)$$

1.5.16. Într-un vas se află un amestec de heliu și oxigen, care la temperatura $t = -2,0^{\circ}\text{C}$ și presiunea $p = 91,3 \text{ kPa}$ are densitatea $\rho = 0,44 \text{ kg/m}^3$. Ce presiune va fi în vas dacă din el dispăre, prin oxidarea pereților, o fracțiune $f = 0,50$ din moleculele de oxigen ?

Rezolvare. Fie $x_{1,2} = v_{1,2} / V$ concentrațiile molare inițiale ale componentelor. Atunci $pV = (v_1 + v_2)RT \rightarrow x_1 + x_2 = p / (RT)$. (1)

Pe de altă parte, **densitatea** amestecului :

$$\rho = (v_1 \mu_1 + v_2 \mu_2) / V = x_1 \mu_1 + x_2 \mu_2 . \quad (2)$$

Din aceste două ecuații rezultă :

$$x_1 = [\mu_2 \rho / (RT) - \rho] : (\mu_2 - \mu_1) = 30 \text{ mol/m}^3 ,$$

$$x_2 = [\rho - \mu_1 \rho / (RT)] : (\mu_2 - \mu_1) = 10 \text{ mol/m}^3 . \quad (3)$$

Presiunea finală cerută :

$$\begin{aligned} p' &= [v_1 + (1 - f) v_2] RT / V = [x_1 + (1 - f)x_2] RT = \\ &= \rho [x_1 + (1 - f)x_2] : (x_1 + x_2) = 80 \text{ kPa} \end{aligned} \quad (4)$$

sau înlocuind $x_{1,2}$ din (3) :

$$p' = \rho - f (\rho RT - \mu_1 \rho) / (\mu_2 - \mu_1) = 80 \text{ kPa} . \quad (5)$$

1.5.17. Două vase identice sunt separate printr-o membrană semipermeabilă, care lasă să treacă liber numai moleculele de hidrogen. În primul vas se introduce un amestec de Ar și H_2 la presiunea $p = 150 \text{ kPa}$, iar în celălalt este inițial vid. În starea finală presiunea din primul vas a devenit $p' = 100 \text{ kPa}$. Aflați raportul maselor m_1 / m_2 de argon și hidrogen. Temperatura este constantă .

Rezolvare. Hidrogenul se va răspândi uniform în ambele vase, deci jumătate din el trece în vasul al doilea. Atunci ecuația de stare se scrie:

$$pV = (m_1 / \mu_1 + m_2 / \mu_2)RT, \quad p'V = [m_1 / \mu_1 + m_2 / (2\mu_2)]RT. \quad (1)$$

Împărțim ecuațiile membru la membru :

$$\begin{aligned} p / p' &= (m_1 / \mu_1 + m_2 / \mu_2) : [m_1 / \mu_1 + m_2 / (2\mu_2)] = \\ &= (m_1 / m_2 + \mu_1 / \mu_2) : [m_1 / m_2 + \mu_1 / (2\mu_2)] , \end{aligned} \quad (2)$$

$$m_1 / m_2 = (\mu_1 / \mu_2) \cdot (2p' - p) : [2(p - p')] = 10 . \quad (3)$$

1.5.18. Mase egale din două gaze diferite se introduc inițial într-un vas de volum V_1 separat de un alt vas vidat, de volum V_2 , printr-o membrană semipermeabilă fixă, care lasă să treacă liber numai moleculele din primul gaz . După stabili-

rea echilibrului la temperatura constantă , presiunea din vasul 1 scade de $n = 2,0$ ori. Aflați raportul volumelor V_2/V_1 , știind că primul gaz este de $k = 2,0$ ori mai ușor decât al doilea.

Rezolvare. Pentru gazul 1 membrana este permeabilă, ca și cum n-ar exista, și el se răspândește *uniform* pe ambele volume. Atunci din masa sa totală o fracțiune $V_1/(V_1 + V_2)$ va rămâne în vasul 1 și cealaltă fracțiune $V_2/(V_1 + V_2)$ se duce în vasul 2.

Scriem **ecuația de stare** pentru gazele din primul vas :

$$pV_1 = (m/\mu_1 + m/\mu_2)RT ,$$

$$(p/n) V_1 = [(m/\mu_1) V_1/(V_1 + V_2) + m/\mu_2] RT . \quad (1)$$

Împărțim ecuațiile membru la membru :

$$n = (1/\mu_1 + 1/\mu_2) : \{1/[\mu_1(1 + V_2/V_1)] + 1/\mu_2\} \rightarrow$$

$$V_2/V_1 = (n - 1)(1 + \mu_2/\mu_1) : (1 + \mu_2/\mu_1 - n) . \quad (2)$$

Raportul în care o substanță este mai *greă* decât alta este egal cu raportul **densităților**, deci la gaze (evident în **aceleași** condiții de presiune și temperatură) :

$$\rho_2/\rho_1 = \mu_2\rho/(RT) : [\mu_1\rho/(RT)] = \mu_2/\mu_1 = k . \quad (3)$$

Atunci (2) se scrie:

$$V_2/V_1 = (n - 1)(1 + k) : (1 + k - n) = 3,0 . \quad (4)$$

1.5.19. Într-un cilindru vertical vidat se introduce sub piston (care poate luneca etanș fără frecări) hidrogen și heliu care ocupă la echilibru jumătate din volumul cilindrului. Datorită unui orificiu în piston, închis cu o membrană permeabilă pentru He , volumul final al amestecului devine $V/3$. Aflați raportul maselor m_2/m_1 . Temperatura este constantă .

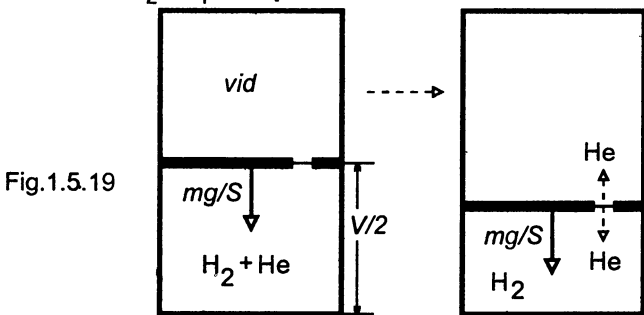


Fig.1.5.19

Rezolvare. Inițial presiunea amestecului egalează presiunea exercitată de piston, mg/S (deasupra pistonului fiind vid). În starea finală heliul se răspândește în întregul cilindru și presiunea sa

va fi aceeași deasupra și dedesubtul pistonului, de aceea presiunea exercitată de piston este echilibrată chiar de presiunea *parțială* a hidrogenului de sub piston. Scriem **ecuația de stare** pentru compartimentul inferior, pentru amestecul inițial, și pentru hidrogen în starea finală :

$$(mg/S) \cdot V/2 = (m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2)RT, \quad (1)$$

$$(mg/S) \cdot V/3 = (m_1/\mu_1)RT. \quad (1)$$

Împărțim cele două ecuații membru la membru :

$$3/2 = (m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2) : (m_1/\mu_1) = 1 + (m_2/m_1) (\mu_1/\mu_2),$$

$$m_2/m_1 = \mu_2/(2\mu_1) = 1,00. \quad (2)$$

1.5.20. Un vas cilindric este împărțit în două jumătăți printr-un piston termoconductor, aflat în echilibru. Inițial în stânga este un amestec de He și H₂, iar în dreapta O₂ cu masa m₃ = 32 g. În piston există un orificiu închis cu o membrană permeabilă numai pentru He, astfel încât în starea finală pistonul delimitează în stânga un sfert din volumul cilindrului. Aflați masele m₁ de He și m₂ de H₂.

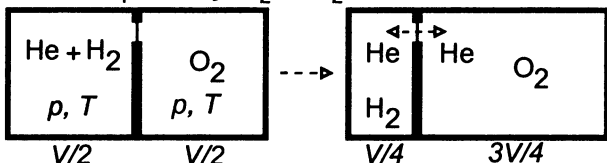


Fig.1.5.20

Rezolvare. La echilibru mecanic al pistonului presiunea de o parte și de alta a pistonului trebuie să fie aceeași :

$$p = (v_1 + v_2)RT : (V/2) = v_3RT : (V/2) \rightarrow v_1 + v_2 = v_3. \quad (1)$$

În starea finală heliul se răspândește uniform în *întregul* vas, deci presiunea sa de o parte și de alta a pistonului va fi aceeași. Atunci presiunea hidrogenului va fi egală cu presiunea oxigenului :

$$p' = (m_2/\mu_2) RT : (V/4) = (m_3/\mu_3) RT : (3V/4) \rightarrow$$

$$\rightarrow m_2 = m_3 \cdot \mu_2/(3 \mu_3) = (2/3) \text{ g}. \quad (2)$$

Dar din (1) rezultă:

$$m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2 = m_3/\mu_3 \rightarrow m_1 = m_3 \mu_1/\mu_3 - m_2 \mu_1/\mu_2 =$$

$$= m_3 [\mu_1/\mu_3 - \mu_1/(3 \mu_3)] = m_3 \cdot 2 \mu_1/(3 \mu_3) = (8/3) \text{ g}. \quad (3)$$

1.5.21. Un cilindru orizontal este împărțit inițial în 3 compartimente, ca în figură, cu ajutorul a două pistoane subțiri, care se mișcă etanș fără frecări. Care vor fi pozițiile finale ale pistoanelor, dacă pistonul din stânga este permeabil pentru H₂, iar cel din dreapta este permeabil pentru H₂ și He ?

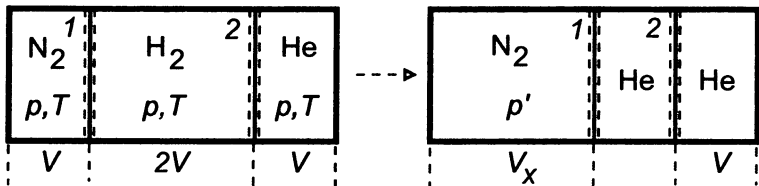


Fig.1.5.21

Rezolvare. Deoarece ambele pistoane sunt *permeabile* pentru H_2 , acesta se va răspândi uniform în *întregul* cilindru și presiunea sa parțială va fi aceeași peste tot, deci el nu va influența poziția pistoanelor și iese din joc. Azotul rămâne însă închis în compartimentul stâng și final va avea volumul V_x . Pe de altă parte pistonul 2 este permeabil pentru heliu, deci heliul se va destinde de la volumul său inițial V la volumul $4V - V_x$. Pistonul 1 se va deplasa spre dreapta până când se egalează presiunea azotului cu presiunea parțială a heliului :

$$p' = pV / V_x = pV / (4V - V_x) \rightarrow V_x = V / 2 ,$$

deci pistonul 1 se va deplasa până la mijlocul cilindrului.

* 1.5.22. **Un balon cu înveliș rigid conține aer la temperatura $t_i = 57^\circ\text{C}$, temperatura aerului exterior fiind $t_e = 17^\circ\text{C}$. Camera balonului comunică cu exteriorul. Balonul plutește în echilibru la o anumită înălțime. Cu cât se schimbă această înălțime dacă temperatura aerului din interior crește cu $\Delta T_i = 0,10 \text{ K}$, iar temperatura aerului exterior rămâne constantă ?**

Rezolvare. Condiția de plutire : $m + \rho_i V = \rho_e V$. (1)

Deoarece variația de temperatură este foarte mică, și variația densității va fi foarte mică, de aceea putem calcula *variațiile ca diferențiale* :

$$d(m + \rho_i V) = d(\rho_e V) \text{ sau } d\rho_i = d\rho_e, \quad (2)$$

prin variația densității ρ_i balonul urcă sau coboară astfel ca ρ_e să varieze la fel. Dar

$$\rho_e = \mu p / (RT_e), \quad (3)$$

de unde *derivata logaritmică* dă (întâi logaritmăm, apoi diferentțiem):

$$d\rho_e / \rho_e = dp / p, \quad d\rho_e = \rho_e \cdot dp / p, \quad (4)$$

$$\rho_i = \mu p / (RT_i) \text{ dă } d\rho_i / \rho_i = dp / p - dT_i / T_i,$$

$$d\rho_i = \rho_i (dp / p - dT_i / T_i) = d\rho_e = \rho_e \cdot dp / p, \quad (5)$$

de unde $dp / p = \rho_i (dT_i / T_i) : (\rho_i - \rho_e)$. (6)

Formula presiunii *hidrostatice* : $dp = -\rho_e g dh$. (7)

Din formulele de mai sus rezultă acum :

$$\begin{aligned} dh &= - dp / (\rho_e g) = - (\rho / g) (\rho_i / \rho_e) (dT_i / T_i) [1 : (\rho_i - \rho_e)] = \\ &= - (\rho / g) (T_e / T_i) (dT_i / T_i) \{1 : [(\mu p / R)(1 / T_i - 1 / T_e)]\} = \\ &= RT_e^2 dT_i : [\mu g T_i (T_i - T_e)], \end{aligned} \quad (8)$$

ceea ce înseamnă acum (trecând de la diferențiale la variații mici):

$$\Delta h \cong RT_e^2 \Delta T_i : [\mu g T_i (T_i - T_e)] = 18 \text{ m}. \quad (9)$$

**** 1.5.23. Într-o mină adâncă, cum variază presiunea aerului cu distanța până la centrul Pământului ? La suprafața Pământului presiunea este p_0 . Se consideră temperatura constantă.**

Rezolvare. Să luăm un strat orizontal *infinit de subțire* de grosime dr , la distanța r de centrul Pământului. Diferența de presiune de o parte și de alta a stratului este dată de presiunea hidrostatică a stratului :

$$dp = - \rho g dr, \quad (1)$$

unde semnul minus se datorește faptului că dp și dr sunt de semne opuse (dacă coborâm în mină $dr < 0$, iar presiunea crește $dp > 0$).
Dar

$$\rho = \mu p / (RT), \quad g = g_0 \cdot r / R_p. \quad (2)$$

Rezultă atunci $dp = - [\mu p / (RT)] [g_0 r / R_p] dr$, (3)

care, după separarea variabilelor, ne dă prin integrare ($T = \text{const}$) :

$$\int \frac{dp}{p} = - \frac{\mu g_0}{RT R_p} \int r dr$$

sau $\ln p = - [\mu / (RT)] [g_0 / R_p] \cdot r^2 / 2 + C$,

unde constanta de integrare se determină din *condiția la margine*, ca pentru $r = R_p$ să avem $p = p_0$;

$$\ln p_0 = - [\mu / (RT)] [g_0 / R_p] \cdot R_p^2 / 2 + C,$$

deci $\ln(p / p_0) = \mu g_0 (R_p^2 - r^2) : (2RTR_p)$,

$$p = p_0 \exp \{ \mu g_0 (R_p^2 - r^2) : (2RTR_p) \}. \quad (4)$$

Se putea integra și *definit* (limitele de integrare se corespund):

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = - \frac{\mu g_0}{RT R_p} \int_{R_p}^r r dr$$

sau $\ln(p / p_0) = - \mu g_0 (r^2 / 2 - R_p^2 / 2) : (2RTR_p)$, etc.,

aici limitele trebuie să se corespundă, adică pentru $r = R_p$ presiunea este $p = p_0$, iar la distanța r este p .

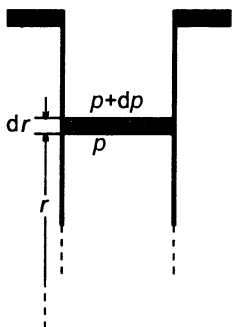


Fig.1.5.23

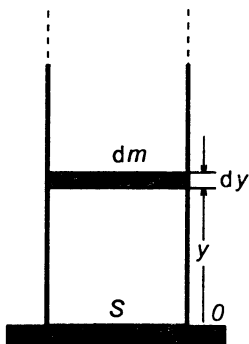


Fig.1.5.25

**** 1.5.24. Considerând că temperatura aerului scade cu altitudinea după o lege liniară, deduceți formula variației presiunii și densității atmosferice cu altitudinea. Comparați presiunea și densitatea date de această formulă, luând gradientul temperaturii $t^* = 6,0 \text{ K/km}$ și temperatura la sol $t_0 = 17^\circ\text{C}$, cu cele date de formula exponențială (luând temperatura medie $t = 7,0^\circ\text{C}$), la altitudinea $h = 2,9 \text{ km}$.**

Rezolvare. $T = T_0 - t^*y$, ($y < T_0/t^*$), $\rho = \mu p / (RT)$, (1)

formula presiunii hidrostatice :

$$dp = -\rho g dy = -\mu p g dy : [R(T_0 - t^*y)] . \quad (2)$$

Separăm variabilele: $dp/p = -(\mu g/R) \cdot dy : (T_0 - t^*y)$ (3)

și integrăm membru cu membru :

$$\int \frac{dp}{p} = \frac{\mu g}{Rt^*} \int \frac{-t^* dy}{T_0 - t^*y} ,$$

$$\ln p = [\mu g / (Rt^*)] \ln(T_0 - t^*y) + C ,$$

unde constanta de integrare se determină din *condiția la margine*: pentru $y = 0$ avem $p = p_0$; $\ln p_0 = [\mu g / (Rt^*)] \ln T_0 + C$, deci

$$\ln(p/p_0) = [\mu g / (Rt^*)] \ln[(T_0 - t^*y) / T_0] . \quad (4)$$

Se poate integra *definit* (limitele de integrare trebuie să se corespundă : la $y = 0$ corespunde p_0 și la y corespunde p):

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \frac{\mu g}{Rt^*} \int_0^y \frac{-t^* dy}{T_0 - t^*y} ,$$

$$\ln(p/p_0) = [\mu g / (Rt^*)] \ln[(T_0 - t^*y) / T_0] .$$

Prin urmare,
$$\rho = \rho_0(1 - t^*y / T_0)^{\mu g \wedge (Rt^*)}, \quad (5)$$

deci la înălțimea cerută $y = h$:

$$\rho = \rho_0(1 - t^*h / T_0)^{\mu g \wedge (Rt^*)} = 0,70 \rho_0. \quad (6)$$

Rezultatul coincide practic cu cel obținut cu formula barometrică

clasică :

$$\rho = \rho_0 e^{-\mu gh / (RT)} = 0,70 \rho_0. \quad (7)$$

Densitatea:

$$\begin{aligned} \rho &= \mu p / (RT) = [\mu \rho_0 / (RT_0)] (1 - t^*y / T_0)^{\mu g \wedge (Rt^*) - 1} = \\ &= \rho_0 (1 - t^*y / T_0)^{\mu g \wedge (Rt^*) - 1}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\rho = \rho_0 (1 - t^*h / T_0)^{\mu g \wedge (Rt^*) - 1} = 0,74 \rho_0 \quad (9)$$

față de
$$\rho = \rho_0 e^{-\mu gh \wedge (RT)} = 0,70 \rho_0.$$

**** 1.5.25. Calculați masa coloanei de aer atmosferic de secțiune $S = 1,00 \text{ m}^2$ și înălțime $h = 1,00 \text{ km}$, știind densitatea $\rho_0 = 1,30 \text{ kg/m}^3$ și presiunea $p_0 = 100 \text{ kPa}$ la suprafața Pământului ($T = \text{const}$ și $g = \text{const}$). Cât va fi greutatea unei coloane infinite ?**

Rezolvare. Formula barometrică:

$$\rho(y) = \rho_0 e^{-\mu gy \wedge (RT)}, \quad (1)$$

$$\rho(y) = \mu p(y) / (RT) = [\mu p_0 / (RT)] e^{-\mu gy \wedge (RT)} = \rho_0 e^{-\rho_0 gy / p_0}. \quad (2)$$

Luăm un strat orizontal *infinite* de subțire la înălțimea y , deci de grosime dy având masa

$$dm = \rho dV = \rho(y) S dy = \rho_0 S e^{-\rho_0 gy / p_0} dy. \quad (3)$$

Integrăm :

$$m = \int dm = \int_0^h \rho_0 S e^{-\rho_0 gy / p_0} dy = \frac{Sp_0}{g} \left(1 - e^{-\rho_0 gh / p_0} \right) = 1,2 \text{ t}. \quad (4)$$

Greutatea coloanei *infinite* ($h \rightarrow \infty$) : $G = Sp_0 = 100 \text{ kN}. \quad (5)$

**** 1.5.26. Arătați că centrul de masă (CM) al unei coloane cilindrice verticale (infinite) de gaz se află la înălțimea la care densitatea gazului scade de e ori. Se consideră $T = \text{const}$ și $g = \text{const}$.**

Rezolvare. Luăm un strat orizontal *infinite* de subțire situat la înălțimea y , deci de grosime dy , având masa elementară (v. fig. de la problema precedentă):

$$dm = \rho dV = \rho(y) S dy = \rho_0 e^{-\mu gy \wedge (RT)} S dy. \quad (1)$$

Prin integrare obținem masa totală :

$$m = \int_0^{\infty} \rho_0 S e^{-\mu g y / (RT)} dy = \frac{\rho_0 S}{-\mu g / (RT)} e^{-\mu g y / (RT)} \Big|_0^{\infty} = \rho_0 \frac{SRT}{\mu g}. \quad (2)$$

Coordonata CM este prin definiție :

$$y_{cm} = \frac{1}{m} \int y dm = \frac{1}{m} \int_0^{\infty} y \rho_0 e^{-\mu g y / (RT)} S dy. \quad (3)$$

Integrala de aici se integrează prin părți :

$$\begin{aligned} \int x e^{-\alpha x} dx &= \int x \frac{d e^{-\alpha x}}{-\alpha} = -\frac{x}{\alpha} e^{-\alpha x} + \frac{1}{\alpha} \int e^{-\alpha x} dx = \\ &= - (1/\alpha) x e^{-\alpha x} - (1/\alpha^2) e^{-\alpha x} + C. \end{aligned} \quad (4)$$

Luată între limitele $(0, \infty)$ dă $1/\alpha^2$, deci în cazul nostru :

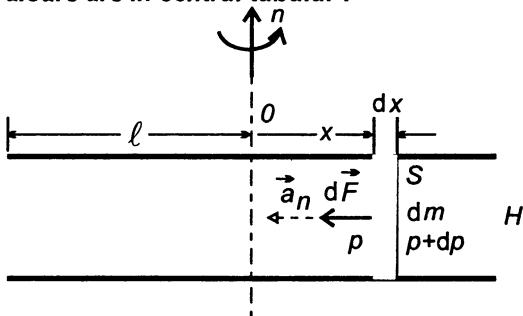
$$y_{cm} = (\rho_0 S / m) [RT / (\mu g)]^2 = RT / (\mu g). \quad (5)$$

La această înălțime densitatea și presiunea sunt :

$$\rho = \rho_0 e^{-\mu g y_{cm} / (RT)} = \rho_0 / e, \quad p = p_0 e^{-\mu g y_{cm} / (RT)} = p_0 / e. \quad (6)$$

**** 1.5.27. Un tub cilindric de lungime $2\ell = 2,00$ m , deschis la capete, se rotește în planul orizontal în jurul axei verticale trecând prin mijlocul tubului cu turația constantă $n = 1200$ rot/min , ca în figură. Presiunea atmosferică este normală, iar temperatura $t = 17^\circ\text{C}$. Cum variază presiunea de-a lungul tubului și ce valoare are în centrul tubului ?**

Fig.1.5.27



Rezolvare. Luăm un *element* de masă dm la distanța x de axa de rotație și având deci grosimea dx , ca în figură. El are o *mișcare circulară uniformă*, deci (*lex secunda*) :

$$dF = dm \cdot \omega^2 x, \quad dF = (p + dp)S - pS = Sdp, \quad (1)$$

$$dm = \rho dV = \rho S dx, \quad \text{dar } \rho = \mu p / (RT), \quad (2)$$

rezultă

$$Sdp = [S \mu p / (RT)] \omega^2 x dx. \quad (3)$$

Separăm variabilele și integram :

$$dp/p = [\mu/(RT)] \omega^2 x dx, \quad \int \frac{dp}{p} = \frac{\mu}{RT} \omega^2 \int x dx,$$

$$\ln p = [\mu/(RT)] \omega^2 x^2 / 2 + C,$$

unde constanta de integrare C se determină din condiția la *margine*:

pentru $x = \ell$ presiunea $p = H$: $\ln H = [\mu/(RT)] \omega^2 \ell^2 / 2 + C$,

deci $\ln(p/H) = [\mu/(2RT)] \omega^2 (x^2 - \ell^2)$,

$$p = H \exp \{ [\mu/(2RT)] \omega^2 (x^2 - \ell^2) \}. \quad (4)$$

Putem integra și *definit* (limitele de integrare se corespund):

$$\int \frac{p dp}{H p} = \int \frac{x \mu}{\ell RT} \omega^2 x dx, \quad \ln \frac{p}{H} = \frac{\mu}{2RT} \omega^2 x^2 \Big|_{\ell}^x, \text{ etc.}$$

La mijlocul tubului presiunea va fi ($x = 0$):

$$p(0) = H \exp \{ [-\mu/(2RT)] \omega^2 \ell^2 \} = 0,91 H = 92,1 \text{ kPa}. \quad (5)$$

**** 1.5.28. Un tub cilindric orizontal, de lungime $\ell = 1,00$ m, închis la un capăt, se rotește cu turația $n = 600$ rot/min în jurul unei axe verticale, care trece prin capătul deschis al tubului. Presiunea atmosferică H este normală, iar temperatura $t = 17^\circ\text{C}$. Calculați presiunea aerului din tub lângă capătul închis.**

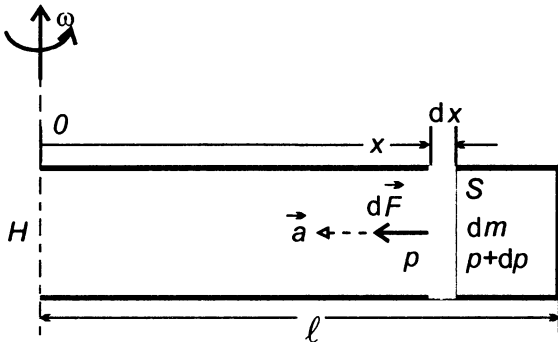


Fig.1.5.28

Rezolvare. Luăm un *element* de masă dm de grosime *infinit mică*, situat la distanța x de axă, deci de grosime dx , ca în figură:

$$dm = \rho dV = \rho S dx. \quad (1)$$

Acest *element* de masă descrie uniform un cerc de rază x , deci are accelerația centripetă $\omega^2 x$ produsă de forța centripetă

$$dF = (p + dp)S - pS = S dp, \quad (2)$$

dată de diferența de presiune. Prin urmare, *principiul II* se scrie

$$dF = S dp = dm \cdot a = \rho S dx \cdot \omega^2 x, \text{ dar } \rho = \mu p / (RT), \quad (3)$$

deci

$$Sdp = [\mu p / (RT)] S\omega^2 x dx . \quad (4)$$

Separăm variabilele și integram (considerăm $T = \text{const}$):

$$\frac{dp}{p} = \frac{\mu}{RT} \omega^2 x dx, \quad \int \frac{dp}{p} = \ln p = \int \frac{\mu}{RT} \omega^2 x dx = \frac{\mu}{2RT} \omega^2 x^2 + C,$$

unde constanta de integrare C se determină din condiția *la margine*

: pentru $x = 0$ avem $p = H$; $\ln H = C$, deci

$$\ln(p/H) = [\mu / (2RT)] \omega^2 x^2, \quad p = H \exp \{ [\mu / (2RT)] \omega^2 x^2 \}. \quad (5)$$

Se putea integra și *definit* (limitele de integrare se corespund):

$$\int_H^p \frac{dp}{p} = \int_0^x \frac{\mu}{RT} \omega^2 x dx, \quad \ln \frac{p}{H} = \frac{\mu}{2RT} \omega^2 x^2 .$$

La capătul închis $x = \ell$:

$$\begin{aligned} p &= H \exp \{ [\mu / (2RT)] \omega^2 \ell^2 \} = 103,8 \text{ kPa} = \\ &= 101,3(1 + 0,024) \text{ kPa} . \end{aligned} \quad (6)$$

Deoarece argumentul funcției exponențiale este « 1 », putem folosi aproximația cunoscută :

$$e^x \approx 1 + x, \quad \text{dacă } |x| \ll 1, \quad (7)$$

$$p \cong H \{ 1 + [\mu / (2RT)] \omega^2 \ell^2 \} = H (1 + 0,024), \quad (8)$$

deci presiunea crește doar cu 2,4 % .

2. PRINCIPIILE TERMODINAMICII

2.1. Transformări simple

2.1.1. Un gaz diatomic ocupă un volum $V = 2,00$ L la temperatura $t_1 = 27^\circ\text{C}$ și presiunea $p_1 = 100$ kPa. Gazul este încălzit izocor până la $p_2 = 300$ kPa. Calculați: a) temperatura finală, b) căldura absorbită, c) lucrul mecanic efectuat, d) variația energiei interne.

Rezolvare. a) Legea transformării izocore :

$$p_2/p_1 = T_2/T_1 \rightarrow T_2 = T_1 \cdot p_2/p_1 = 900 \text{ K} = 627^\circ\text{C} . \quad (1)$$

b) La gazele *diatomice* (ideale) căldura molară izocoră este $C_V = 5R/2$; atunci

$$Q = \nu C_V(T_2 - T_1) = \nu (5R/2)(T_2 - T_1) = (5/2)(\nu RT_2 - \nu RT_1) = \\ = (5/2)(p_2V - p_1V) = (5/2)(p_2 - p_1)V = 1,00 \text{ kJ} . \quad (2)$$

$$c) L = 0, \quad d) \Delta U = Q . \quad (3)$$

2.1.2. Într-un vas închis se află o masă $m = 14$ g N_2 la presiunea inițială normală și temperatura inițială $t_1 = 27^\circ\text{C}$. După încălzire izocoră presiunea a crescut de $n = 2,0$ ori. Aflați: a) temperatura finală, b) volumul ocupat de gaz, c) căldura absorbită, d) lucrul mecanic efectuat, e) variația energiei interne.

Rezolvare. a) $T_2 = T_1 \cdot p_2/p_1 = 600 \text{ K} = 327^\circ\text{C} . \quad (1)$

b) $V = (m/\mu)RT/p_1 = 12,3 \text{ L} . \quad (2)$

c) La gazele *diatomice* căldura molară izocoră este $C_V = 5R/2$;

$$Q = \nu C_V(T_2 - T_1) = \nu (5R/2)T_1(T_2/T_1 - 1) = \\ = (m/\mu)(5R/2)T_1(p_2/p_1 - 1) = 3,11 \text{ kJ} . \quad (3)$$

$$d) L = 0, \quad e) \Delta U = Q . \quad (4)$$

2.1.3. Un gaz ideal, aflat la temperatura inițială $t_1 = 27^\circ\text{C}$, presiunea $p = 100$ kPa și volumul inițial $V_1 = 3,0$ L, efectuează izobar un lucru mecanic $L = -20$ J. Aflați variația de temperatură.

Rezolvare. Scriem ecuația de stare pentru cele două stări :

$$pV_1 = \nu RT_1, \quad pV_2 = \nu R(T_1 + \Delta T), \quad (1)$$

de unde prin scăderea ecuațiilor membru cu membru :

$$L = p(V_2 - V_1) = \nu R \Delta T \rightarrow \Delta T = L / (\nu R) = L : (pV_1 / T_1) = -20 \text{ K} \quad (2)$$

(gazul se comprimă și se răcește).

2.1.4. Aerul dintr-un cilindru cu piston a efectuat prin des-tindere izobară un lucru mecanic $L = 200 \text{ J}$. Aflați: a) căldura absorbită , b) variația energiei interne.

Rezolvare. a) La gazele *diatomice* (aerul este format în princi-pal din N_2 diatomic și O_2 diatomic) căldura molară izobară este

$$C_p = 7R/2. \text{ Atunci } Q = \nu C_p(T_2 - T_1) = \nu (7R/2) (T_2 - T_1) = \\ = (7/2)(pV_2 - pV_1) = (7/2) L = 700 \text{ J}. \quad (1)$$

b) La gazele *diatomice* căldura molară izocoră este $C_v = 5R/2$ (reamintim relația lui **J. R. Mayer** $C_p - C_v = R$) ;

$$\Delta U = \nu C_v(T_2 - T_1) = \nu (5R/2) (T_2 - T_1) = (5/2) (\nu RT_2 - \nu RT_1) = \\ = (5/2) (pV_2 - pV_1) = (5/2) L = 500 \text{ J}. \quad (2)$$

2.1.5. Un volum $V = 1,00 \text{ L}$ de gaz diatomic se află la presiunea normală. Ce cantitate de căldură trebuie transmisă gazului pentru: a) a mări izocor presiunea de $n = 3,0$ ori , b) a mări izobar volumul de același număr de ori ?

Rezolvare. La gazele *diatomice* căldurile molare, izocoră și izobară, sunt $C_v = 5R/2$, $C_p = 7R/2$, ($C_p - C_v = R$).

$$a) Q_v = \nu C_v(T_2 - T_1) = \nu (5R/2) (T_2 - T_1) = (5/2) (\nu RT_2 - \nu RT_1) = \\ = (5/2) (pnV - pV) = (5/2) pV(n - 1) = 506 \text{ J}. \quad (1)$$

$$b) Q_p = \nu C_p(T_2 - T_1) = (7/2) pV(n - 1) = 707 \text{ J}. \quad (2)$$

2.1.6. Într-un cilindru vertical, cu piston de masă $m = 10,0 \text{ kg}$ și secțiune $S = 1,00 \text{ dm}^3$, care se poate mișca etanș fără frecări, se află aer la temperatura inițială $t_1 = 27^\circ\text{C}$, presiunea atmosferică fiind $H = 100 \text{ kPa}$. Gazul este încălzit cu $\Delta T = 100 \text{ K}$. Aflați : a) înălțimea finală la care urcă pistonul, dacă înălțimea inițială este $h_1 = 30 \text{ cm}$, b) lucrul mecanic efectuat de gaz , c) căldura absorbită , d) variația energiei interne .

Rezolvare. a) Presiunea gazului este egală cu presiunea atmosferică H plus presiunea exercitată de piston mg/S . Transformarea este *izobară* la această presiune:

$$T_2/T_1 = V_2/V_1 = Sh_2/(Sh_1) = h_2/h_1, \quad h_2 = h_1 \cdot T_2/T_1 = 40 \text{ cm.} \quad (1)$$

$$b) L = \rho \Delta V = (H + mg/S)S(h_2 - h_1) =$$

$$= (H + mg/S)S h_1(h_2/h_1 - 1) = (H S + mg) h_1 \Delta T/T_1 = 109,8 \text{ J.} \quad (2)$$

$$c) Q = \nu C_p \Delta T = \nu (7R/2)(T_2 - T_1) = (7/2)(\rho V_2 - \rho V_1) = \\ = (7/2) L = 384,3 \text{ J.} \quad (3)$$

$$d) \Delta U = \nu C_v (T_2 - T_1) = \nu (5R/2)(T_2 - T_1) = (5/2) L = 274,5 \text{ J.} \quad (4)$$

2.1.7. Într-un cilindru vertical de volum $V = 200 \text{ cm}^3$, sub un piston de masă $m = 50 \text{ kg}$ și arie $S = 50 \text{ cm}^2$ (care se poate mișca etanș fără frecări), se află gaz ideal la temperatura $T = 300 \text{ K}$. I se comunică gazului căldura $Q = 46,5 \text{ J}$ și temperatura lui crește cu $\Delta T = 100 \text{ K}$. Presiunea atmosferică este normală. Aflați variația energiei interne a gazului.

Rezolvare. Presiunea gazului este egală cu presiunea atmosferică H plus presiunea exercitată de piston, mg/S .

Transformarea este izobară la această presiune constantă :

$$\Delta U = Q - L = Q - \rho \Delta V = Q - (H + mg/S)(V' - V) =$$

$$= Q - (H + mg/S)V(V'/V - 1) = Q - (H + mg/S)V(T'/T - 1) =$$

$$= Q - (H + mg/S)V\Delta T/T = 33 \text{ J.}$$

2.1.8. Un amestec de gaz monoatomic (1) și gaz diatomic (2) cu raportul maselor $m_2/m_1 = 2,0$ și al maselor molare $\mu_2/\mu_1 = 2,0$ este încălzit izobar la presiunea $p = 100 \text{ kPa}$ de la un volum $V_1 = 1,00 \text{ L}$ până la o temperatură $T_2 = 2T_1$. Aflați căldura absorbită de amestec.

$$\text{Rezolvare. } Q = [(m_1/\mu_1)C_{p1} + (m_2/\mu_2)C_{p2}](T_2 - T_1), \quad (1)$$

$$\text{dar } \rho V_1 = (m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2)RT_1, \quad (2)$$

$$Q = [(m_1/\mu_1)(R + C_{v1}) + (m_2/\mu_2)(R + C_{v2})] T_1(T_2/T_1 - 1) = \\ = [R(m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2) + C_{v1} m_1/\mu_1 + C_{v2} m_2/\mu_2](T_2/T_1 - 1) \cdot \rho V_1 : \\ : [R(m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2)] = \rho V_1(T_2/T_1 - 1) \{1 + (C_{v1} m_1/\mu_1 + C_{v2} m_2/\mu_2) : \\ : [R(m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2)]\} = \rho V_1(T_2/T_1 - 1) \{1 + (C_{v1} \mu_2/\mu_1 + \\ + C_{v2} m_2/m_1) : [R(\mu_2/\mu_1 + m_2/m_1)]\} = 300 \text{ J.} \quad (3)$$

2.1.9. O masă $m = 0,80 \text{ g}$ H_2 aflată într-un cilindru vertical, cu piston de masă $m_0 = 102 \text{ kg}$ și secțiune $S = 1,00 \text{ dm}^2$ (care se poate mișca etanș fără frecări), este încălzită până la temperatura $t_2 = 127^\circ\text{C}$. Energia potențială a pistonului crește cu

$\Delta E_p = 83 \text{ J}$. **Presiunea atmosferică** $H = 100 \text{ kPa}$. **Aflați: a) volumul inițial al gazului, b) temperatura inițială, c) lucrul mecanic efectuat de gaz, d) variația energiei interne a gazului.**

Rezolvare. a) $\Delta E_p = m_0 g \Delta h$, $\Delta V = S \Delta h \rightarrow$

$$\Delta V = S \Delta E_p / (m_0 g) . \quad (1)$$

Presiunea gazului este egală cu presiunea atmosferică H plus presiunea pistonului $m_0 g / S$.

$$V_1 = V_2 - \Delta V = (m / \mu) R T_2 : (H + m_0 g / S) - S \Delta E_p : (m_0 g) = 2,5 \text{ L} . (2)$$

$$b) T_1 = [\mu / (mR)] (H + m_0 g / S) V_1 = 300 \text{ K} = 27^\circ \text{C} . \quad (3)$$

$$c) L = p(V_2 - V_1) = (m / \mu) R (T_2 - T_1) = 16,6 \text{ J} \quad (4)$$

$$\text{sau } L = (H + m_0 g / S) S \Delta E_p : (m_0 g) = [HS / (m_0 g) + 1] \Delta E_p . \quad (5)$$

$$d) Q = \nu C_p (T_2 - T_1) = \nu (7 / 2) R (T_2 - T_1) = (7 / 2) L = 58,2 \text{ J} . (6)$$

$$e) \Delta U = \nu C_v (T_2 - T_1) = \nu (5 / 2) R (T_2 - T_1) = (5 / 2) L = 41,6 \text{ J} . (7)$$

2.1.10. Un tub vertical deschis la ambele capete, de secțiune interioară $S = 1,00 \text{ cm}^2$, este cufundat cu capătul inferior puțin în mercur. În tub plutește un piston de masă neglijabilă care se poate mișca etanș fără frecări. Ce lucru mecanic trebuie efectuat pentru a ridica pistonul încet până la înălțimea $h' = 1,38 \text{ m}$. Presiunea atmosferică este normală. Reprezentați grafic forța de presiune rezultantă asupra pistonului în funcție de înălțime.

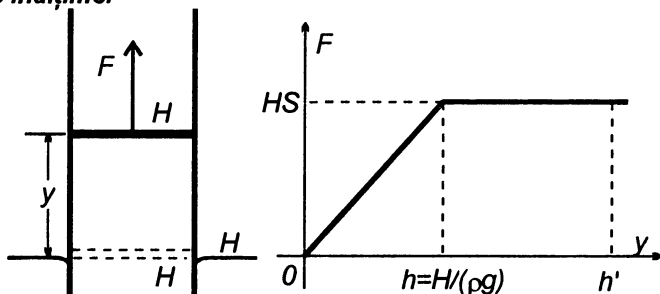


Fig.2.1.10

Rezolvare. Fie F forța cu care tragem pistonul în sus. Cum începem să ridicăm pistonul presiunea atmosferică împinge mercurul în tub. Conform *principiului vaselor comunicante*, în tub la nivelul mercurului din vas presiunea trebuie să fie atmosferică, deci

$$H = H - F / S + \rho g y \rightarrow F = \rho g y S \quad (1)$$

(= greutatea coloanei de mercur din tub).

Forța aplicată F crește odată cu înălțimea y a coloanei de mercur. La un moment dat presiunea hidrostatică a coloanei echilibrează presiunea atmosferică $\rho gh = H$. Din acest moment se formează camera barometrică sub piston, în care avem "vidul lui Torricelli" (vapori saturați de mercur care au o presiune foarte mică, neglijabilă). Din acest moment forța $F = HS$ trebuie să învingă forța presiunii atmosferice (fiindcă sub piston avem vidul lui Torricelli). Lucrul mecanic care trebuie efectuat este dat de aria de sub graficul forței F :

$$L = (1/2)HS \cdot h + HS \cdot (h' - h) = H^2 S / (2\rho g) + HS[h' - H / (\rho g)]. \quad (2)$$

Primul termen reprezintă lucrul mecanic necesar urcării centrului de greutate a coloanei de mercur: $(h/2) \cdot \rho g h S$;

$$L = HS[h' - H / (2\rho g)] = 10,13 \text{ J}. \quad (3)$$

2.1.11. O cantitate $\nu = 2,5$ mol de gaz ideal, aflat la temperatura inițială $T_1 = 300\text{K}$, este răcită izocor până la o presiune de $k = 3,0$ ori mai mică, apoi încălzită izobar până la temperatura inițială. Aflați lucrul mecanic efectuat de gaz. Reprezentați procesul în diagramele $p - V$, $V - T$, $p - T$. Care este căldura absorbită în întregul proces?

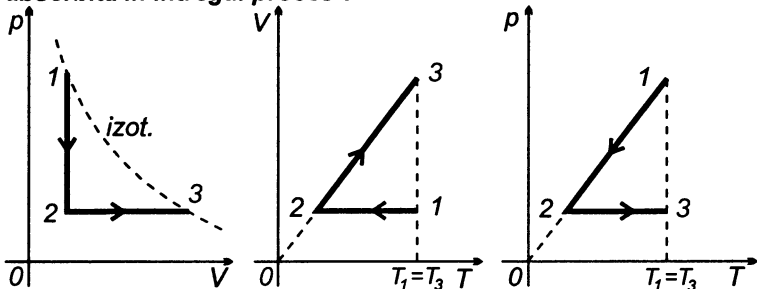


Fig.2.1.11

Rezolvare. Se efectuează lucru mecanic numai pe izobara 2 - 3:

$$\begin{aligned} L &= p_2(V_3 - V_2) = p_2 V_3 - p_2 V_2 = \nu R(T_3 - T_2) = \\ &= \nu R T_1 (1 - T_2 / T_1) = \nu R T_1 (1 - 1/k) = 4,15 \text{ J}, \end{aligned} \quad (1)$$

unde $T_2 / T_1 = p_2 / p_1 = 1/k$ (transformare izocoră). Deoarece $T_1 = T_3$ avem $\Delta U = 0$ (gaz ideal! - energia internă a gazului ideal depinde numai de temperatură) și atunci $Q = \Delta U + L = L$. (2)

2.1.12. O cantitate $\nu = 1,00$ mol de gaz ideal suferă transformarea 1 - 2 - 3 din figură, unde $T_3 = T_1 = 300 \text{ K}$ și căldura

netă primită este $Q = 5,0$ kJ. Aflați V_3/V_1 . Reprezentați procesul în diagramele $V - T$, $p - T$.

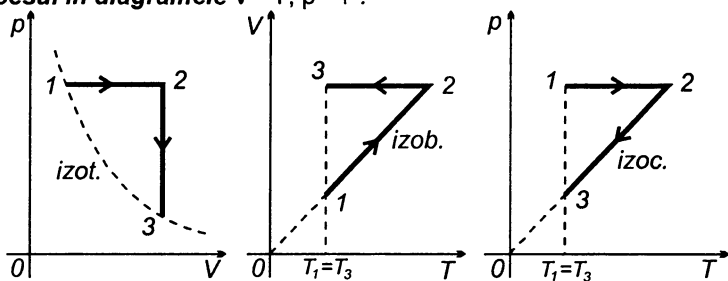


Fig.2.1.12

$$\begin{aligned} \text{Rezolvare. } Q &= \nu C_p(T_2 - T_1) + \nu C_v(T_3 - T_2) = \nu C_p(T_2 - T_1) - \\ &- \nu C_v(T_2 - T_1) = \nu(C_p - C_v)(T_2 - T_1) = \nu R(T_2 - T_1) = \\ &= \nu R T_1(T_2/T_1 - 1) = \nu R T_1(V_2/V_1 - 1), \end{aligned} \quad (1)$$

unde

$$T_2/T_1 = V_2/V_1, \quad V_3/V_1 = V_2/V_1 = 1 + Q/(\nu R T_1) = 3,0 \quad (2)$$

Se poate judeca și astfel: stările 1, 3 sunt la aceeași temperatură, deci $\Delta U = 0$ (gaz ideal), atunci

$$\begin{aligned} Q &= \Delta U + L = L = p_1(V_2 - V_1) = p_1 V_1(V_2/V_1 - 1) = \\ &= \nu R T_1(V_2/V_1 - 1). \end{aligned} \quad (3)$$

2.1.13. Într-un cilindru vertical se află la înălțimea $h = 0,50$ m un piston de masă $m = 50$ kg sub care se află $\nu = 0,50$ mol de gaz ideal, cu căldura molară $C_p = 7R/2$, la temperatura $T = 300$ K și presiunea egală cu presiunea atmosferică. Pistonul este suspendat de un fir vertical și poate aluneca fără frecări. Câtă căldură trebuie transmisă gazului pentru ca pistonul să urce la o înălțime nh , $n = 2,0$?

Rezolvare. Deoarece inițial sub piston gazul are presiunea egală cu cea atmosferică, înseamnă că firul preia inițial întreaga greutate a pistonului. Pe măsură ce începem să încălzim gazul, presiunea sa va crește izocor și tensiunea din fir va slăbi până când se va anula și presiunea gazului va echilibra presiunea atmosferică plus presiunea pistonului: $p = H + mg/S$. În acest moment temperatura va fi T' :

$$T'/T = p/H = 1 + mg/(SH), \quad T'/T - 1 = mg/(SH) \quad (1)$$

și căldura absorbită:

$$Q' = \nu C_v(T' - T) = \nu C_v T(T'/T - 1) = \nu C_v T mg/(SH), \quad (2)$$

dar în starea inițială $H \cdot Sh = \nu RT \rightarrow 1 / (SH) = h / (\nu RT)$, (3)
 atunci (2) devine

$$Q' = \nu C_V T m g \cdot h / (\nu RT) = (C_V / R) m g h = [(C_p - R) / R] m g h. \quad (4)$$

În continuare firul se "scofâlcește" și gazul se destinde izobar :

$$\begin{aligned} Q'' &= \nu C_p (T'' - T') = \nu C_p T' (T'' / T' - 1) = \\ &= \nu C_p T [(H + mg / S) / H] [Snh / (Sh) - 1] = \\ &= \nu C_p T (n - 1) + \nu C_p T [mg / (SH)] (n - 1) = \\ &= \nu C_p T (n - 1) + [C_p / R] m g h (n - 1). \end{aligned} \quad (5)$$

Căldura totală absorbită :

$$Q = Q' + Q'' = m g h (n C_p / R - 1) + \nu C_p T (n - 1) = 3,2 \text{ kJ}. \quad (6)$$

2.1.14. O cantitate $\nu = 4,00$ mol de gaz ideal parcurge ciclul din figură, în care $T_1 = 256 \text{ K}$, $T_3 = 441 \text{ K}$, iar stările 2 și 4 sunt pe aceeași izotermă. Aflați lucrul mecanic efectuat de gaz (cunoscând constanta R). Reprezentați ciclul în diagramele $V - T$, $p - T$.

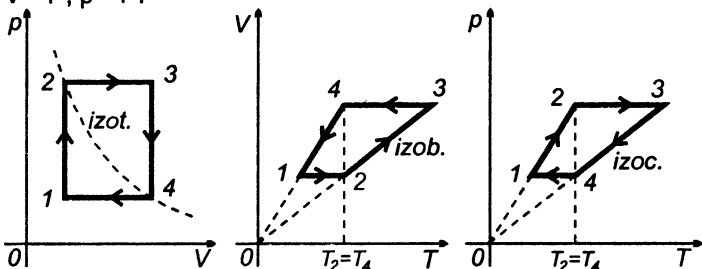


Fig.2.1.14

Rezolvare. Lucrul mecanic efectuat este egal cu aria cuprinsă de ciclu :

$$\begin{aligned} L &= (p_2 - p_1)(V_4 - V_1) = p_2 V_4 - p_2 V_1 - p_1 V_4 + p_1 V_1 = \\ &= \nu R (T_3 - T_2 - T_4 + T_1). \end{aligned} \quad (1)$$

Pe de altă parte : $T_2 / T_1 = p_2 / p_1 = p_3 / p_4 = T_3 / T_4 \rightarrow$

$$T_2 T_4 = T_1 T_3, \quad T_2 = T_4 = \sqrt{T_1 T_3}. \quad (2)$$

$$L = \nu R (T_3 - 2 \sqrt{T_1 T_3} + T_1) = \nu R (\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1})^2 = 831 \text{ J}. \quad (3)$$

2.1.15. O cantitate $\nu = 3,0$ mol de gaz ideal suferă un proces ciclic format din două izobare : p_1 , αp_1 , $\alpha = 5/4$, și două izocore: V_1 , βV_1 , $\beta = 6/5$. Diferența dintre temperatura maximă și cea minimă pe ciclu este $\Delta T = 100 \text{ K}$. Aflați lucrul mecanic efectuat de gaz (se dă constanta R). Reprezentați ciclul în

diagramele p - V, V - T, p - T .

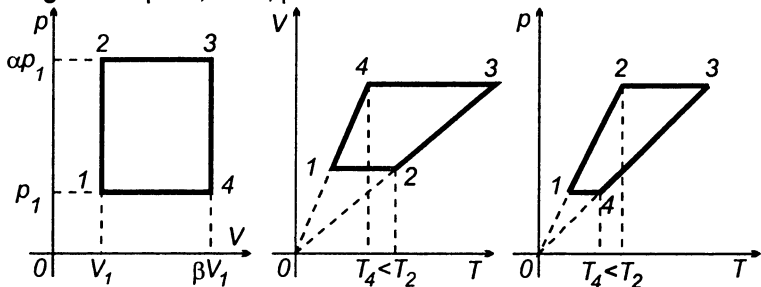


Fig.2.1.15

Rezolvare. În starea 2 : $p_2 V_2 = \alpha \beta p_1 V_1$ și în starea 4 : $p_4 V_4 = \beta p_1 V_1$, deci $T_2 > T_4$. Lucrul mecanic este dat de aria ciclului :

$$L = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = (\alpha - 1)(\beta - 1) p_1 V_1, \quad (1)$$

dar $p_1 V_1 = \nu R T_1$, $p_3 V_3 = \alpha \beta p_1 V_1 = \nu R (T_1 + \Delta T)$ (2)

$$\rightarrow p_1 V_1 = \nu R \Delta T : (\alpha \beta - 1); \quad (3)$$

$$L = (\alpha - 1)(\beta - 1) \nu R \Delta T : (\alpha \beta - 1) = 249,3 \text{ J}. \quad (4)$$

2.1.16. Un mol de gaz ideal se destinde izobar dintr-o stare 1 cu temperatura $T = 100 \text{ K}$, apoi printr-o transformare izocoră ajunge în starea finală 2 cu o aceeași temperatură T . În acest proces gazul absoarbe (net) căldura $Q = 831 \text{ J}$. Aflați raportul de destindere V_2/V_1 (se dă R). Reprezentați procesul în diagramele p - V, V - T, p - T.

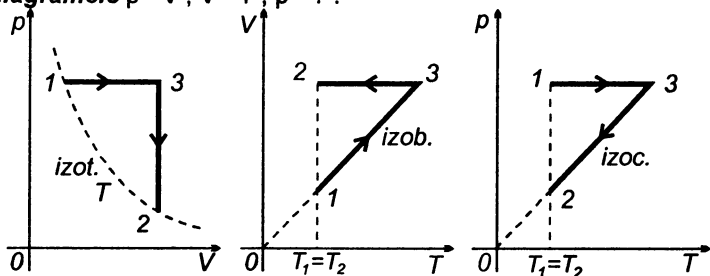


Fig.2.1.16

Rezolvare. $Q = \nu C_p (T_3 - T) + \nu C_v (T - T_3) = \nu (C_p - C_v) (T_3 - T) = \nu R T (T_3/T - 1)$, $T_3/T = 1 + Q / (\nu R T)$. (1)

Pe de altă parte, transformarea izobară 1 - 3 dă :

$$V_3/V_1 = V_2/V_1 = T_3/T = 1 + Q / (\nu R T) = 2,0. \quad (2)$$

2.1.17. Un mol de gaz ideal trece izocor din starea 1 în starea 2 la presiunea de $n = 1,5$ ori mai mică. Apoi este încălzit izobar până la temperatura inițială. În procesul 1 - 2 - 3 gazul efectuează lucrul mecanic $L = 830 \text{ J}$. Aflați T_1 (se dă R).

Reprezentați procesul în diagramele $p - V$, $V - T$, $p - T$.

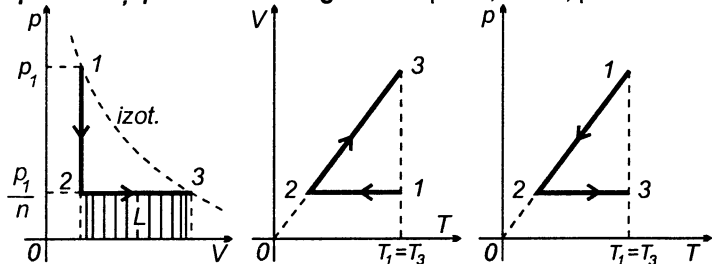


Fig.2.1.17

Rezolvare. $p_1 V_1 = p_3 V_3 = p_2 V_3 = \nu R T_1$, (1)

$$L = p_2(V_3 - V_2) = p_3(V_3 - V_1) = p_3 V_3(1 - V_1/V_3) =$$

$$= p_3 V_3(1 - p_3/p_1) = \nu R T_1(1 - 1/n),$$
 (2)

$$T_1 = (L / (\nu R)) [1 : (1 - 1/n)] = 300 \text{ K}.$$
 (3)

2.1.18. O cantitate $\nu = 1,00$ mol de gaz ideal monoatomic este încălzită izocor din starea 1 cu temperatura $T_1 = 300 \text{ K}$ în starea 2 și apoi răcită izobar până la temperatura T_3 . Aflați această temperatură, dacă în cele două procese căldura schimbată între gaz și mediu a fost aceeași : $|Q| = 1,50 \text{ kJ}$ (se dă constanta R). Reprezentați procesul în diagramele $p - V$, $V - T$, $p - T$.

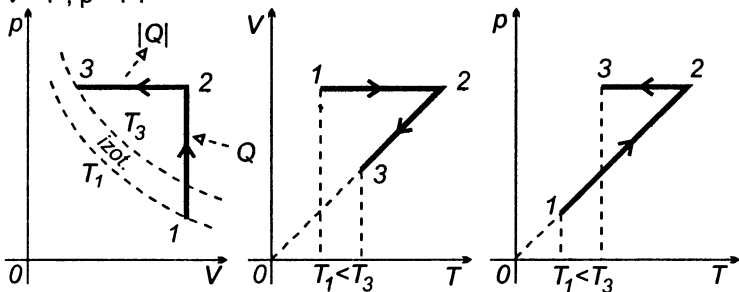


Fig.2.1.18

Rezolvare. $Q = \nu C_V(T_2 - T_1) = |Q| = \nu C_p(T_2 - T_3) \rightarrow$ (1)

$$C_V(T_2 - T_1) = C_p(T_2 - T_3) \rightarrow T_2 = (C_p T_3 - C_V T_1) : (C_p - C_V),$$
 (2)

care introdusă în prima ecuație (1) dă :

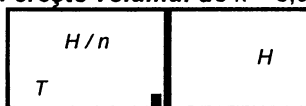
$$Q = \nu C_V (C_p T_3 - C_p T_1) : (C_p - C_V) \rightarrow T_3 = T_1 + QR / (\nu C_V C_p). \quad (3)$$

Pentru gazele monoatomice : $C_V = 3R/2$, $C_p = 5R/2$:

$$T_3 = T_1 + QR / (\nu 15R^2/4) = T_1 + 4Q / (15 \nu R) = 350 \text{ K}. \quad (4)$$

2.1.19. Într-un cilindru orizontal, cu piston, se află $\nu = 2,0$ mol de gaz la temperatura $T = 300 \text{ K}$ și la o presiune de $n = 2,0$ ori mai mică decât cea atmosferică. Pistonul este împiedicat să se deplaseze în sensul comprimării gazului. Căldura molară izocoră a gazului este $C_V = 5R/2$. Câtă căldură trebuie transmisă gazului pentru a-i crește volumul de $k = 3,0$ ori ?

Fig.2.1.19



Rezolvare. Presiunea gazului fiind mai mică decât cea atmosferică și pistonul fiind împiedicat să comprime gazul, la început, prin încălzire, presiunea gazului va crește izocor până egalează presiunea atmosferică :

$$T' : T = H : (H/n) = n, \quad T' = n T. \quad (1)$$

După aceasta, încălzind gazul în continuare, presiunea rămâne constantă, egală cu cea atmosferică, și gazul se destinde izobar :

$$T'' / T' = kV / V = k; \quad (2)$$

$$Q = \nu C_V (T' - T) + \nu C_p (T'' - T') = \nu C_V T (T' / T - 1) + \nu C_p T' (T'' / T' - 1) = \nu C_V T (n - 1) + \nu (C_V + R) T n (k - 1) = 47,4 \text{ kJ}. \quad (3)$$

2.1.20. O cantitate $\nu = 4,0$ mol de gaz ideal trece dintr-o stare 1 în starea finală 2 prin două căi, ca în figură. Cunoscând $T_1 = 300 \text{ K}$ și $T_3 = 400 \text{ K}$, aflați diferența dintre căldurile absorbite în cele două căi. Se dă constanta R . Reprezentați procesele în diagramele $V - T$, $p - T$.

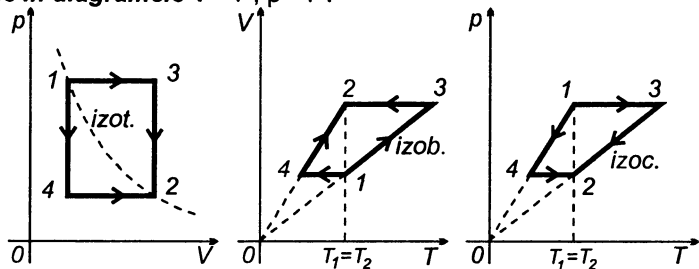


Fig.2.1.20

Rezolvare. $T_1/T_4 = p_1/p_4 = p_3/p_2 = T_3/T_2 \rightarrow$

$T_1 T_2 = T_3 T_4, T_1 = T_2, T_4 = T_1^2/T_3.$ (1)

$Q_1 = \nu C_p(T_3 - T_1) + \nu C_v(T_1 - T_3) = \nu R(T_3 - T_1),$ (2)

$Q_2 = \nu C_v(T_4 - T_1) + \nu C_p(T_1 - T_4) = \nu R(T_1 - T_4),$ (3)

$Q_1 - Q_2 = \nu R(T_3 - T_1 - T_1 + T_4) = \nu R(T_3 - 2T_1 + T_1^2/T_3) =$
 $= \nu R(T_3 - T_1)^2/T_3 = 831 \text{ J}.$ (4)

2.1.21. Un gaz monoatomic suferă transformările din figură. Știind $T_4 - T_1 = \Delta T = 100 \text{ K}$, aflați căldura absorbită de $\nu = 1,00 \text{ mol}$ de gaz (se dă R). Reprezentați procesul și în diagramele $p - V, V - T$.

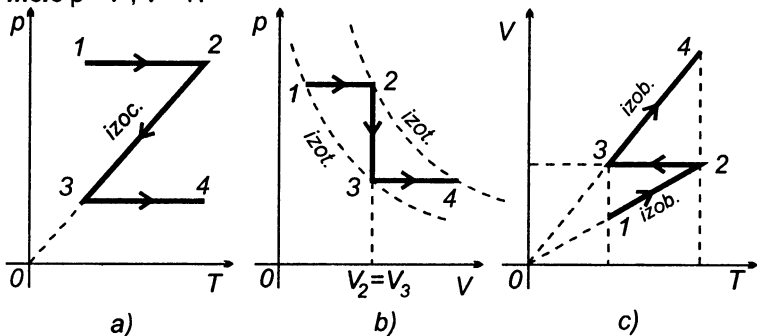


Fig.2.1.21

Rezolvare. $Q = \nu C_p(T_2 - T_1) + \nu C_v(T_3 - T_2) + \nu C_p(T_4 - T_3) =$
 $= \nu C_p(T_4 - T_1) + \nu C_v(T_1 - T_4) + \nu C_p(T_4 - T_1) =$
 $= \nu(2C_p - C_v)(T_4 - T_1) = \nu(2R + C_v)\Delta T = \nu(7R/2)\Delta T = 2,91 \text{ kJ}.$

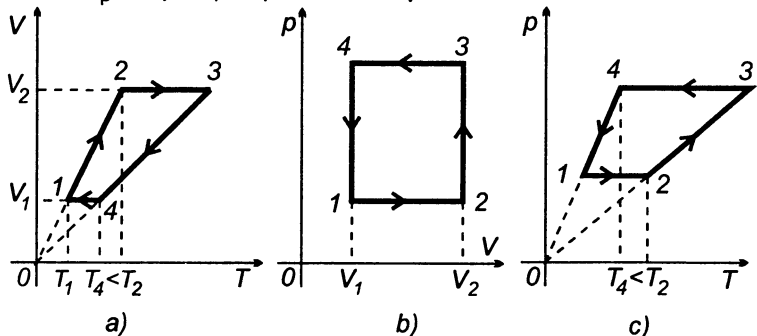


Fig.2.1.22

2.1.22. În ciclul din figură se cunosc : $\nu = 0,50 \text{ mol}$, $T_1 = 300 \text{ K}$, $T_4 = 400 \text{ K}$, $V_2/V_1 = \varepsilon = 3,0$. **Aflați lucrul mecanic efectuat de gaz. Transcrieți ciclul în diagramele $p - V$, $p - T$.**

Rezolvare. Lucrul mecanic efectuat de gaz este egal cu aria ciclului în diagrama $p - V$, în cazul nostru el este *negativ* :

$$\begin{aligned} L &= - (p_4 - p_1)(V_2 - V_1) = - p_1 V_1 (p_4/p_1 - 1)(V_2/V_1 - 1) = \\ &= - \nu R T_1 (T_4/T_1 - 1)(V_2/V_1 - 1) = \\ &= - \nu R (T_4 - T_1)(V_2/V_1 - 1) = - 831 \text{ J} . \end{aligned}$$

*

2.2. Transformarea adiabatică și alte transformări

2.2.1. Un volum $V_1 = 2,00$ L de oxigen este comprimat adiabatic până la un volum final $V_2 = 1,00$ L și o presiune finală $p_2 = 100$ kPa. Aflați : a) presiunea inițială , b) lucrul mecanic efectuat de gaz , c) variația energiei interne .

Rezolvare. a) $p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma \rightarrow p_1 = p_2 (V_2 / V_1)^\gamma = 38$ kPa (1)
(pentru oxigen - gaz diatomic - , $\gamma = 1,40$).

b) $L = -\Delta U = -\nu C_V (T_2 - T_1) = -(C_V / R)(\nu RT_2 - \nu RT_1) =$
 $= -[C_p / (C_p - C_V)] (p_2 V_2 - p_1 V_1) = (p_1 V_1 - p_2 V_2) / (\gamma - 1) = -405$ J (2)
(gazul este comprimat).

c) $\Delta U = -L$. (3)

2.2.2. Un volum $V_1 = 0,100$ L de gaz diatomic , aflat în condiții normale, este comprimat adiabatic cheltuindu-se un lucru mecanic $W = 46$ J. Aflați temperatura finală.

Rezolvare. Conform problemei precedente :

$$L = (p_1 V_1 - p_2 V_2) / (\gamma - 1) = -W \rightarrow p_2 V_2 = p_1 V_1 + (\gamma - 1) W, \quad (1)$$

$$p_2 V_2 / (p_1 V_1) = \nu RT_2 / (\nu RT_1) = T_2 / T_1 = [p_1 V_1 + (\gamma - 1) W] / (p_1 V_1), \quad (2)$$

$$T_2 = T_1 [1 + (\gamma - 1) W / (p_1 V_1)] = 773 \text{ K} = 500^\circ\text{C} . \quad (3)$$

Se putea judeca și astfel :

$$W = -L = \Delta U = \nu C_V (T_2 - T_1), \text{ dar } p_1 V_1 = \nu RT_1 ,$$

$$W = (p_1 V_1 C_V / R) (T_2 / T_1 - 1) = [p_1 V_1 / (\gamma - 1)] (T_2 / T_1 - 1), \text{ etc.} \quad (4)$$

2.2.3. Un gaz diatomic este comprimat micșorându-și volumul de $\varepsilon = 2,0$ ori, o dată adiabatic , și o dată izoterm. Aflați raportul lucrurilor mecanice .

Rezolvare. $L_{ad} / L_{izot} = [-\nu C_V (T_2 - T_1)] : [\nu RT_1 \ln (V_2 / V_1)] =$
 $= [1 / (\gamma - 1)] (-T_2 / T_1 + 1) : \ln (V_2 / V_1) = [1 / (\gamma - 1)] [(V_1 / V_2)^\gamma - 1] :$

$$: [-\ln (V_2 / V_1)] = [1 / (\gamma - 1)] (\varepsilon^{\gamma-1} - 1) : \ln \varepsilon = 1,15 , \quad (1)$$

unde $R = C_p - C_V$, $\gamma = C_p / C_V$ și pentru comprimarea adiabatică :

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} . \text{ Se vede că este mai avantajos de comprimat}$$

izoterm, fapt care se vede și grafic. Invers, la destindere, gazul efectuează mai mult lucru mecanic pe izotermă.

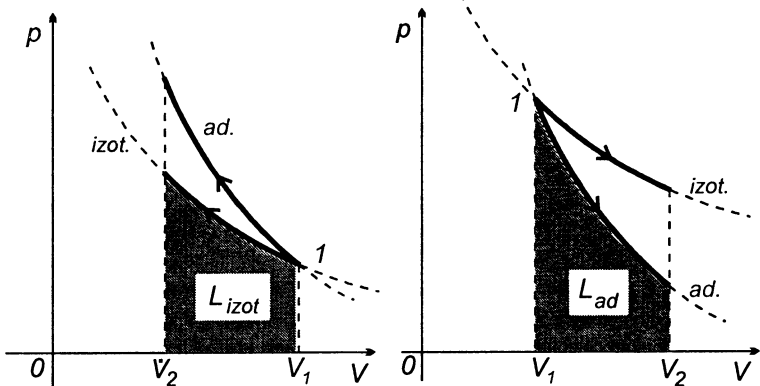


Fig.2.2.3

2.2.4. O masă $m = 2,90$ g de aer a fost încălzită cu $\Delta T = 200$ K cu ajutorul cantității de căldură $Q = 700$ J. Aflați variația energiei interne și lucrul mecanic efectuat.

$$\text{Rezolvare. } \Delta U = \nu C_v \Delta T = (m / \mu)(5R / 2) \Delta T = 415,7 \text{ J} \quad (1)$$

(pentru gazele diatomice $C_v = 5R / 2$).

$$L = Q - \Delta U = 284,3 \text{ J}. \quad (2)$$

2.2.5. O cantitate $\nu = 1,6$ mol de gaz ideal diatomic efectuează un proces ciclic 1-2-3-1 în care $V_2 / V_1 = \varepsilon = 2,0$ și $T_1 = 300$ K. Aflați : a) lucrul mecanic efectuat în transformarea adiabatică, precum și pe întregul ciclu, b) raportul presiunilor p_2 / p_3 . Reprezentați ciclul în diagramele $V - T$, $p - T$.

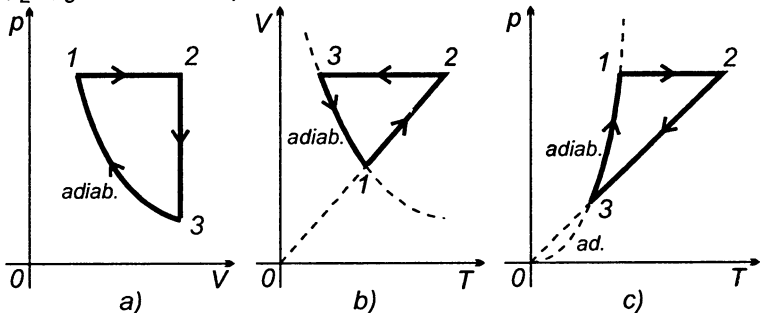


Fig.2.2.5

$$\begin{aligned} \text{Rezolvare. a) } L_{\text{ad}} &= -\nu C_V(T_1 - T_3) = -\nu C_V T_1(1 - T_3/T_1) = \\ &= -\nu C_V T_1(1 - 1/\varepsilon^{\gamma-1}) = -2,49 \text{ kJ}, \end{aligned} \quad (1)$$

unde $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1}$, $V_3 = V_2$, $\gamma = 1,40$ pentru gazele diatomice.

$$L_{1-2} = p_1(V_2 - V_1) = p_1 V_1(V_2/V_1 - 1) = \nu R T_1(\varepsilon - 1) = 3,99 \text{ kJ}, \quad (2)$$

$$L_{\text{ciclu}} = L_{1-2} + L_{\text{ad}} = 1,50 \text{ kJ}. \quad (3)$$

$$\text{b) } p_2/p_3 = p_1/p_3 = (V_3/V_1)^\gamma = (V_2/V_1)^\gamma = \varepsilon^\gamma = 2,64. \quad (4)$$

Observăm că în diagrama $V - T$ adiabata arată asemănător ca în $p - V$, iar în $p - T$ arată ca o parabolă care trece prin origine unde are un *minim*.

2.2.6. Un gaz perfect efectuează din starea inițială 1 o des-tindere adiabatică până într-o stare 2. Demonstrați că dacă din starea 2 gazul primește izocor o cantitate de căldură egală cu lucrul mecanic efectuat în transformarea adiabatică, temperatura gazului revine la temperatura inițială. Reprezentați procesul în diagramele $p - V$, $V - T$, $p - T$.

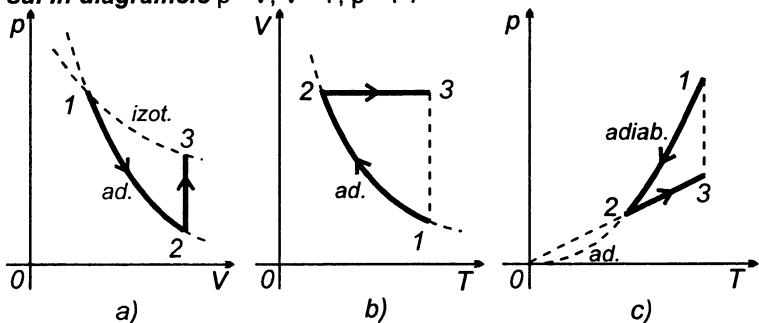


Fig.2.2.6

$$\text{Rezolvare. } L_{1-2} = -\nu C_V(T_2 - T_1), \quad Q_{2-3} = \nu C_V(T_3 - T_2), \quad (1)$$

$$L_{1-2} = Q_{2-3} \rightarrow -(T_2 - T_1) = T_3 - T_2 \rightarrow T_3 = T_1. \quad (2)$$

2.2.7. Pentru ciclul din figură se cunosc : $m = 3,2 \text{ g}$, $\mu = 0,032 \text{ kg/mol}$ (oxigen), $T_1 = 300 \text{ K}$, $T_2 = 600 \text{ K}$, $T_3 = 400 \text{ K}$.

Aflați lucrul mecanic efectuat de gaz. Reprezentați ciclul în diagramele $V - T$, $p - T$.

Rezolvare. Lucrul mecanic este egal cu aria ciclului :

$$\begin{aligned} L &= (1/2)(V_2 - V_1)(p_2 - p_1) = (1/2)(V_2 p_2 - V_2 p_1 - V_1 p_2 + V_1 p_1) = \\ &= (1/2)(\nu R T_2 - V_3 p_1 - V_1 p_2 + \nu R T_1), \end{aligned} \quad (1)$$

dar $V_3/V_1 = T_3/T_1$ și $p_2/p_1 = p_2/p_3 = T_2/T_3$, (2)

$$L = (1/2)(\nu RT_2 - p_1 V_1 \cdot T_3/T_1 - p_1 V_1 \cdot T_2/T_3 + \nu RT_1) =$$

$$= [mR/(2\mu)](T_2 - T_3 - T_1 T_2/T_3 + T_1) = 20,75 \text{ J}. \quad (3)$$

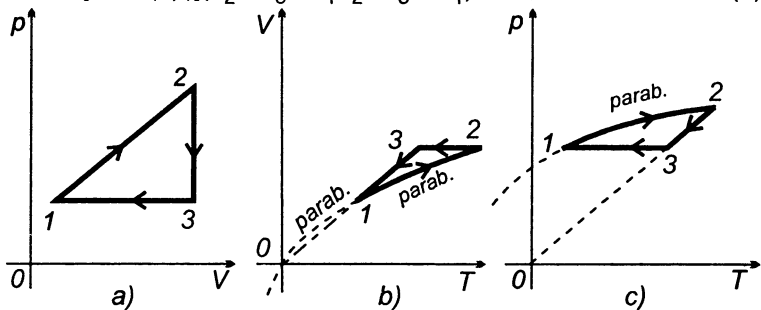


Fig.2.2.7

Ecuția procesului 1 - 2 este de forma $p = p_0 + a V$ (linie dreaptă), atunci

$$pV = \nu RT \rightarrow (p_0 + a V)V = \nu RT - \text{parabolă}, \quad (4)$$

$$pV = \nu RT \rightarrow p(p - p_0)/a = \nu RT - \text{parabolă}. \quad (5)$$

2.2.8. Un gaz ideal monoatomic aflat inițial la temperatura $t_1 = 0^\circ\text{C}$, $p_1 = 300 \text{ kPa}$ și $V_1 = 2,00 \text{ m}^3$, este comprimat adiabatic efectuându-se asupra gazului un lucru mecanic $W = 35 \text{ kJ}$. Aflați până la ce temperatură se încălzește gazul.

Rezolvare. $W = -L = \nu C_V(T_2 - T_1) \rightarrow T_2 = T_1 + W/(\nu C_V)$, (1)

dar $\nu = p_1 V_1 / (RT_1)$, atunci

$$T_2 = T_1 + W RT_1 / (p_1 V_1 C_V) = T_1 [1 + R W / (C_V p_1 V_1)] = 284 \text{ K}. \quad (2)$$

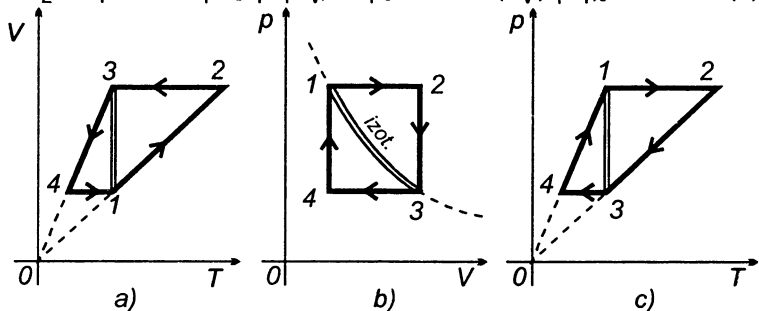


Fig.2.2.9

2.2.9. În care din cele două procese ciclice, 1-2-3 sau 1-3-4, gazul efectuează un lucru mecanic mai mare ?

Reprezentați procesul și în diagramele $p - V$, $p - T$.

Rezolvare. În diagrama $p - V$ se vede imediat că $L_{123} > L_{134}$ (comparăm ariile ciclurilor).

2.2.10. Un proces ciclic efectuat cu un gaz ideal se reprezintă în diagrama $p - V$ printr-un cerc parcurs în sens orar. Arătați grafic : a) pe ce porțiune a ciclului gazul primește căldură și pe ce porțiune cedează, b) pe ce porțiune a ciclului căldura specifică este pozitivă și pe ce porțiune este negativă .

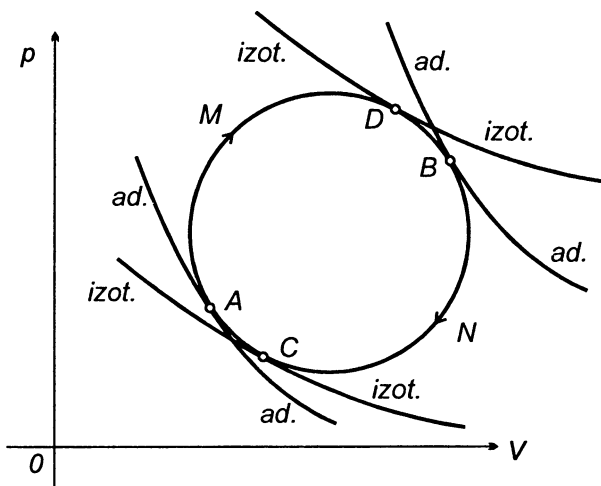


Fig.2.2.10

Rezolvare. Ducem familia de *izoterme* și de *adiabate*. Punem în evidență izotermele și adiabatele *tangente* la graficul procesului. Atunci pe porțiunea CAMD gazul se încălzește, iar pe porțiunea AMDB primește căldură, fiindcă în punctele de tangență A, B cu *adiabata* avem căldura schimbată $Q = 0$.

Deoarece $dQ = \nu CdT$, se vede că pe porțiunea AMD gazul primește căldură și se încălzește, deci $C > 0$; la fel pe porțiunea BNC gazul cedează căldură și se răcește, deci $C > 0$. În schimb pe porțiunea DB gazul se răcește, deși primește căldură (fiindcă face lucru mecanic mai mult decât căldura primită și energia internă scade), deci aici $C < 0$; la fel pe porțiunea CA gazul se încălzește, deși cedează căldură (gazul primește lucru mecanic mai mult decât cedează căldură și energia internă crește), deci și aici $C < 0$.

2.2.11. Un cilindru orizontal termoizolant de masă $M = 3,00$ kg, închis la capete și așezat pe un plan orizontal fără frecări, conține $\nu = 1,00$ mol de gaz ideal diatomic. La mijlocul cilindrului este în echilibru un piston termoizolant de masă $m = 2,00$ kg, care se poate mișca etanș fără frecări. I se imprimă cilindrului o viteză orizontală longitudinală $v = 5,0$ m/s. Cu cât crește temperatura gazului după stingerea oscilațiilor pistonului ?

Rezolvare. Avem aici de fapt o ciocnire plastică între cilindru și piston (cu gaz ; neglijăm masa gazului față de masa pistonului), care inițial au viteza v , respectiv 0, și final au o viteză comună. Procesul de ciocnire durează până când se sting oscilațiile pistonului. În ciocnirea plastică avem o pierdere de energie cinetică a corpurilor, care se transformă în energie internă (a gazului):

$$Q = (1/2) m_r v_r^2 = (1/2)[mM / (m + M)] v^2 = \Delta U = \nu C_v \Delta T, \quad (1)$$

unde m_r este masa redusă (sau relativă) a celor două corpuri, iar v_r este viteza relativă a unui corp față de celălalt ($C_v = 5R/2$),

$$\Delta T = [1 / (2\nu C_v)] [mM / (m + M)] v^2 = 0,72 \text{ K}. \quad (2)$$

2.2.12. Într-un cilindru orizontal fix se află gaz diatomic, la o presiune de $n = 2,00$ ori mai mare decât presiunea exterioară p_0 , închis de un piston de masă $M = 4,00$ kg care se poate mișca etanș fără frecări, dar este inițial blocat. Încălzind gazul și deblocând pistonul, acesta se deplasează uniform accelerat și atinge la un moment dat viteza $v = 10$ m/s. Se neglijează capacitatea calorică a cilindrului și pistonului. Aflați căldura absorbită de gaz. Cât devine această căldură dacă presiunea exterioară este neglijabilă ?

Rezolvare. Mișcarea pistonului fiind uniform accelerată, forța care acționează asupra sa trebuie să fie constantă :

$$F = (p - p_0)S = \text{const} \rightarrow p = \text{const}, \quad (1)$$

deci gazul suferă o destindere **izobară** : $Q = \nu C_p \Delta T$.

Conform teoremei variației energiei cinetice, lucrul mecanic efectuat asupra pistonului de forța rezultantă este egal cu variația energiei cinetice a acestuia :

$$(p - p_0)\Delta V = (1/2)Mv^2, \quad p(1 - 1/n) = (1/2)Mv^2, \quad (2)$$

$$\text{dar } pV = \nu RT \rightarrow p\Delta V = \nu R\Delta T, \quad (p = \text{const}), \quad (3)$$

$$p(1 - 1/n) \nu R\Delta T / p = (1/2)Mv^2 \rightarrow \nu R\Delta T = (1/2)Mv^2 : (1 - 1/n), \quad (4)$$

$$Q = \nu C_p \Delta T = (C_p / R) (1/2)Mv^2 : (1 - 1/n), \quad (5)$$

$$\text{dar } C_v = R / (\gamma - 1), \quad C_p = \gamma R / (\gamma - 1), \quad (6)$$

$$Q = [\gamma / (\gamma - 1)] (1/2) M v^2 : (1 - 1/n) = 1,4 \text{ kJ} . \quad (7)$$

Dacă presiunea exterioară este neglijabilă, înseamnă $n \rightarrow \infty$:

$$Q_0 = [\gamma / (\gamma - 1)] (1/2) M v^2 = 0,70 \text{ kJ} . \quad (8)$$

2.2.13. Într-un cilindru vertical, sub un piston de masă $M = 40 \text{ kg}$ aflat la înălțimea $h_0 = 1,00 \text{ m}$, se află izolat termic de exterior, heliu de masă $m = 0,16 \text{ g}$ și temperatură $t = 27^\circ\text{C}$. Pistonul este ținut inițial fix, deasupra lui fiind vid. La ce înălțime finală se va stabili până la urmă pistonul dacă îl eliberăm ?

Rezolvare. Energia potențială a pistonului crește cu

$$\Delta E_p = Mg(h - h_0) . \quad (1)$$

Deoarece sistemul este izolat adiabatic de exterior și deasupra pistonului este vid, energia (1) se obține pe seama scăderii energiei interne a gazului :

$$\Delta E_p = - \Delta U = - \nu C_V (T' - T) , \quad (1)$$

dar în starea finală avem ecuația de stare :

$$(Mg / S) \cdot Sh = (m / \mu) RT' , \quad (2)$$

atunci din (1) rezultă : $Mg(h - h_0) =$

$$= - (m / \mu) C_V [Mgh : (Rm / \mu) - T] = - (C_V / R) Mgh + (m / \mu) C_V T ,$$

$$h = [Mgh_0 + (m / \mu) C_V T] : [Mg + (C_V / R) Mg] =$$

$$= [h_0 + m C_V T / (\mu Mg)] : (1 + C_V / R) = 55 \text{ cm} . \quad (3)$$

2.2.14. Într-un vas închis, de volum $V = 0,25 \text{ m}^3$, se află gaz la presiunea $p_1 = 120 \text{ kPa}$. Gazul primește căldura $Q = 8,4 \text{ kJ}$ într-un proces cu căldura molară $C = 21 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$. Aflați presiunea finală.

$$\text{Rezolvare. } Q = \nu C (T_2 - T_1) = (C / R) (\nu RT_2 - \nu RT_1) =$$

$$= (C / R) (p_2 V - p_1 V) = (CV / R) (p_2 - p_1) , \quad (1)$$

$$p_2 = p_1 + QR / (CV) = 133,3 \text{ kPa} . \quad (2)$$

2.2.15. Un gaz ideal este adus dintr-o stare inițială dată prin două procese liniare diferite în stări finale de aceeași temperatură, ca în figură. În care din cele două procese gazul absoarbe mai multă căldură ?

Rezolvare. Deoarece temperatura inițială și cea finală sunt aceleași pentru cele două procese, variația energiei interne este aceeași în cele două procese :

$$Q_1 = \Delta U + L_1 , Q_2 = \Delta U + L_2 , Q_2 - Q_1 = L_2 - L_1 . \quad (1)$$

Lucrul mecanic efectuat este dat de aria (trapezului) de sub grafic :

$$Q_2 - Q_1 = (1/2)(V_2 - V_0)(p_0 + p_2) - (1/2)(V_1 - V_0)(p_0 + p_1) = \\ = (1/2) p_0(V_2 - V_1) + (1/2) V_0 (p_1 - p_2) > 0, \quad (p_1 V_1 = p_2 V_2), \quad (2)$$

deci în procesul 2 (AB_2).

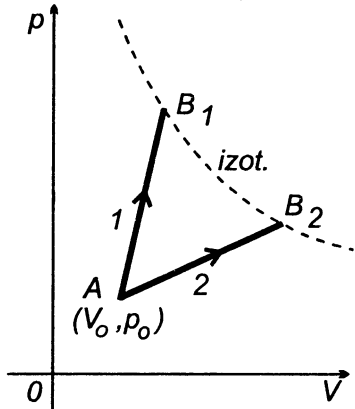


Fig.2.2.15

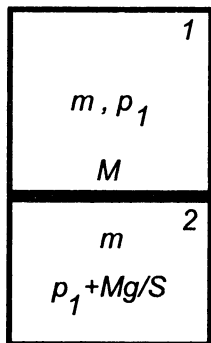


Fig.2.2.16

2.2.16. Într-un cilindru așezat vertical se află un piston care separă două mase egale dintr-un același gaz la temperatura $T_1 = 300$ K. Pistonul se poate deplasa etanș fără frecări și raportul volumelor este $r = 3,0$. Care va fi raportul volumelor dacă temperatura crește la $T_2 = 400$ K ?

Rezolvare. Presiunea gazului de sub piston echilibrează presiunea dată de piston, Mg/S , plus presiunea gazului de deasupra. Deoarece avem mase egale din același gaz, scriem ecuațiile transformării generale :

$$p_1 V_1 / T_1 = (p_1 + Mg/S)(V_1/r) / T_1 = p_1' V_1' / T_2 = \\ = (p_1' + Mg/S)(V_1'/r') / T_2, \quad (1)$$

$$V_1 + V_2 = V_1' + V_2' \rightarrow V_1(1 + 1/r) = V_1'(1 + 1/r'). \quad (2)$$

Din aceste ecuații rezultă :

$$p_1 = (p_1 + Mg/S) : r \rightarrow p_1 = (Mg/S) : (r - 1); \\ p_1' = (Mg/S) : (r' - 1), \quad (3)$$

$$(p_1/p_1')(T_2/T_1) = V_1'/V_1 \\ \rightarrow [(r' - 1)/(r - 1)] (T_2/T_1) = (1 + 1/r)/(1 + 1/r'), \quad (4)$$

$$r'^2 - r' [(r^2 - 1)/r] T_1/T_2 - 1 = 0 \text{ sau } r'^2 - 2r' - 1 = 0, \\ r' = 1 \pm \sqrt{2} = 2,41. \quad (5)$$

2.2.17. Un gaz ideal se destinde de la volumul V_1 până la un volum V_2 : a) izobar , b) izoterm , c) adiabatic .

a) **Reprezentați destinderea în diagramele $p - V$, $V - T$, $p - T$.**

b) **În care destindere lucrul mecanic efectuat este minim ?**

c) **Care este semnul variației energiei interne ?**

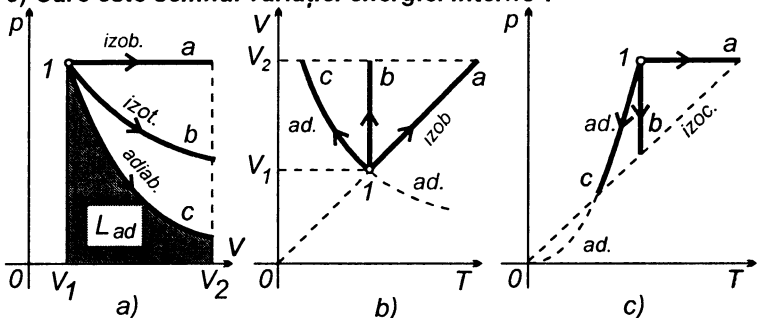


Fig.2.2.17

Rezolvare. a) V. figura , b) L este minim pe adiabată (c),

c) $\Delta U > 0$ pe izobară, $\Delta U = 0$ pe izotermă , $\Delta U < 0$ pe adiabată .

2.2.18. O masă de gaz suferă transformarea închisă din figură. Se cunosc : $V_1 = 1,00$ L, $V_2 = 0,200$ L, $p_1 = 1,00$ atm, $p_2 = p_4$.

a) **Aflați p_3 .** b) **Reprezentați ciclul în diagramele $V - T$, $p - T$.**

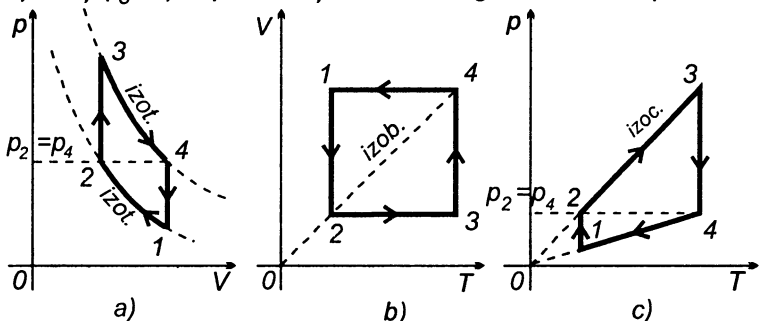


Fig.2.2.18

Rezolvare.

$$p_2 / p_1 = V_4 / V_3 = p_3 / p_4 , \quad (1)$$

$$p_2 = p_1 \cdot V_1 / V_2 = p_4 , \quad p_3 = p_4 \cdot V_1 / V_2 = p_1 (V_1 / V_2)^2 = 25,0 \text{ atm.} \quad (2)$$

2.2.19. Un gaz ideal monoatomic ($C_v = 3R/2$) se destinde astfel încât căldura sa molară este constantă, și efectuează un lucru mecanic $L = 165$ J. Apoi gazul este încălzit izocor până la temperatura inițială, absorbind căldura $Q = 125$ J. Aflați

căldura molară din primul proces.

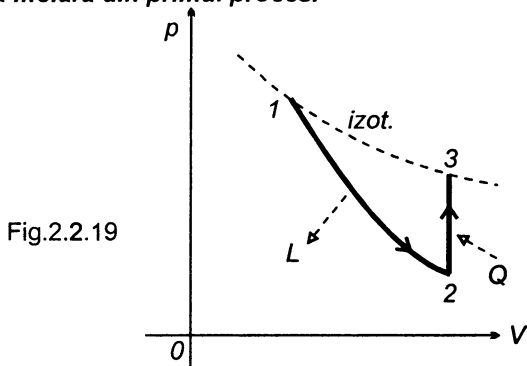


Fig.2.2.19

Rezolvare. Ca să revină izocor la temperatura inițială, destinderea trebuie să fie *sub* izoterma temperaturii inițiale, ca în figură.

Principiul I al termodinamicii dă pentru procesul 1 - 2 :

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + L, \quad Q_{12} = \nu C_x(T_2 - T_1), \quad \Delta U_{12} = \nu C_v(T_2 - T_1). \quad (1)$$

Dar conform enunțului :

$$T_3 = T_1 \rightarrow Q = \nu C_v(T_3 - T_2) = \nu C_v(T_1 - T_2) = -\Delta U_{12}, \quad (2)$$

$$Q_{12} = \nu C_x(T_2 - T_1) = -(C_x / C_v) Q, \quad (3)$$

atunci *principiul I* pentru 1 - 2 dă

$$-(C_x / C_v) Q = L - Q \rightarrow C_x = C_v(Q - L) / Q = -4,0 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K}). \quad (4)$$

Căldura molară *negativă*, $C = Q / (\nu \Delta T) < 0$, înseamnă că sistemul, deși primește căldură, se răcește, fiindcă efectuează lucru mecanic mai mult decât căldura primită, pe seama energiei sale interne, care va scădea.

2.2.20. O cantitate $\nu = 1,00$ mol de gaz ideal parcurge ciclul din figură, unde $T_1 = 400$ K, iar procesul 3 - 1 este descris de ecuația $T = (1/2) T_1(3 - BV) BV$, unde $B = \text{const}$. Aflați lucrul mecanic efectuat de gaz pe ciclu. Reprezentați procesul și în diagramele $p - V$, $p - T$.

Rezolvare. Conform figurii date :

$$T_1 = T_3 = (1/2) T_1(3 - BV) BV, \quad (1)$$

$$(BV)^2 - 3(BV) + 2 = 0, \quad BV_1 = 1,00 \text{ și } BV_3 = 2,00. \quad (2)$$

$$pV = \nu RT = \nu R (1/2) T_1(3 - BV) BV \rightarrow$$

$$p = (1/2)\nu R T_1(3 - BV) B, \quad (3)$$

prin urmare, în diagrama $p - V$ transformarea 3 - 1 este o linie dreaptă (3).

$$p_1 = (1/2)vR T_1(3 - BV_1) B = vR T_1 B, \quad p_3 = (1/2)vR T_1 B. \quad (4)$$

În diagrama $p - V$ se vede că lucrul mecanic este egal cu aria ciclului (a triunghiului) :

$$L = (1/2)(p_1 - p_3)(V_3 - V_1) = (1/2) \cdot (1/2)vRT_1 B \cdot (1/B) = \\ = (1/4) vR T_1 = 831 \text{ J}. \quad (5)$$

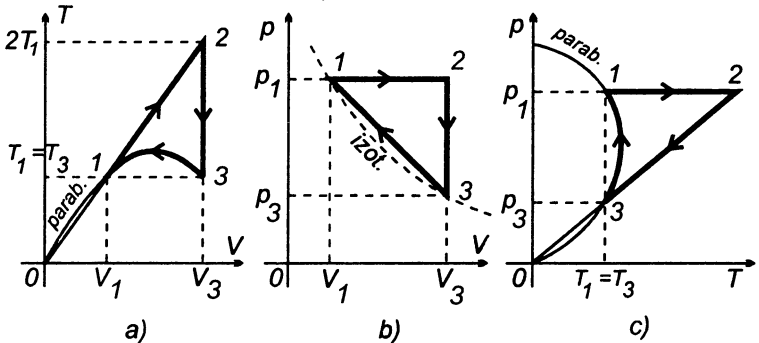


Fig.2.2.20

Pentru graficul în diagrama $p - T$ avem din (3)

$$V = 3/B - 2p / (vRT_1 B^2), \text{ atunci}$$

$$pV = vRT \rightarrow p [3/B - 2p / (vRT_1 B^2)] = vRT, \quad (6)$$

deci graficul este o parabolă care trece prin origine (T este funcție pătratică de p).

2.2.21. Un mol de gaz ideal, din starea 1 cu temperatura $T_1 = 100 \text{ K}$, se destinde în vid efectuând un lucru mecanic printr-o turbină, izolat fiind termic de exterior. Gazul este adus din starea finală 2 în starea inițială 1 prin procesele din figură, unde $T_2 = T_3$, $\varepsilon = V_2/V_1 = 3,0$ și căldura totală absorbită $Q = 72 \text{ J}$. Aflați lucrul mecanic efectuat prin turbină la destinderea în vid.

Rezolvare. Gazul fiind izolat adiabatic, efectuează lucru mecanic pe seama energiei sale interne :

$$L = -\Delta U = -vC_v(T_2 - T_1). \quad (1)$$

Deoarece $T_2 = T_3$, avem

$$\Delta U_{23} = 0, \quad Q_{23} = L_{23} = -(1/2)(p_2 + p_3)(V_2 - V_1), \quad (2)$$

unde lucrul mecanic este egal cu aria (trapez) de sub grafic .

$$Q_{23} = - (1/2)(p_2 V_2 - p_2 V_1 + p_3 V_3 - p_3 V_1) = - (1/2)(p_3 V_2 - p_2 V_1), \quad (3)$$

deoarece $p_2 V_2 = p_3 V_1$. Transcriem Q_{23} astfel:

$$Q_{23} = - (1/2)(p_2 V_2 p_3 / p_2 - p_2 V_2 V_1 / V_2) =$$

$$= - (1/2) vRT_2 (p_3 / p_2 - V_1 / V_2) = - (1/2) vRT_2 (\varepsilon - 1/\varepsilon). \quad (4)$$

$$Q_{31} = vC_v(T_1 - T_3) = vC_v(T_1 - T_2), \quad (5)$$

$$Q = Q_{23} + Q_{31} = - (1/2) vRT_2 (\varepsilon - 1/\varepsilon) + vC_v(T_1 - T_2), \quad (6)$$

de unde scoatem $T_2 = (vC_v T_1 - Q) : [vC_v + (1/2) vR (\varepsilon - 1/\varepsilon)]$, (7)
atunci lucrul mecanic (1) se poate calcula :

$$L = vC_v(T_1 - T_2) = [Q + (1/2) vRT_1(\varepsilon - 1/\varepsilon)] :$$

$$: [1 + R(\varepsilon - 1/\varepsilon) / (2C_v)] = 625 \text{ J}. \quad (8)$$

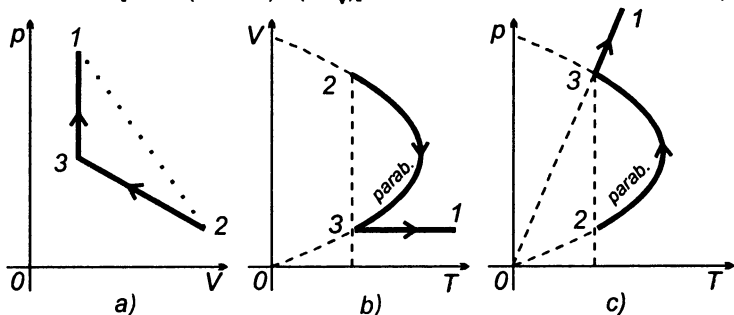


Fig.2.2.21

Pe grafic observăm că ecuația procesului *linear* 2 - 3 este de forma $p = p_0 - a V$, deci

$$pV = vRT \rightarrow (p_0 - a V) V = vRT - \text{parabolă},$$

$$pV = vRT \rightarrow p(p_0 - p) / a = vRT - \text{parabolă}. \quad (9)$$

2.2.22. Pentru a obține un vid bun într-un vas de sticlă obișnuit de laborator, se recomandă încălzirea pereților de sticlă în timpul vidării pentru a evacua și gazul adsorbit (lipit) de pereți. Evaluați cu cât ar crește presiunea într-un vas obișnuit de laborator dacă toate moleculele adsorbite s-ar dezlipi de pereți, considerând stratul monomolecular. Se dă constanta Boltzmann $k = R / N_A$.

Rezolvare. Avem formulele cunoscute :

$$pV = vRT = (N / N_A)RT = NkT, \quad p = (N / V)kT = nkT. \quad (1)$$

Fie d - diametrul unei molecule ($d \sim 3 \text{ \AA}$), atunci, dacă moleculele sunt așezate într-un singur strat, fiecărei molecule îi va reveni

(aproximativ) un pătrat de suprafață d^2 și deci numărul moleculelor lipite pe suprafața interioară a vasului va fi $N \approx S / d^2$, atunci,
 $p = [S / (d^2 V)] kT = \{4\pi r^2 : [(4/3)\pi r^3 d^2]\} kT = [3 / (rd^2)] kT \approx 2,8 \text{ Pa}, (2)$
 unde $r \sim 5 \text{ cm}$, $T \sim 300 \text{ K}$. Un vid obișnuit este $\sim 10^{-3} \text{ torr} \sim 0,1 \text{ Pa}$, un vid bun este $10^{-5} \dots 10^{-6} \text{ torr} \sim 10^{-3} \dots 10^{-4} \text{ Pa}$. Prin urmare, moleculele adsorbite, dacă se dezlipesc de pe pereții vasului pot strica "serios" vidul din vas.

2.2.23. Calculați distanța medie dintre moleculele unui gaz ideal aflat în condiții normale de presiune și temperatură. Se dea constanta lui Boltzmann .

Rezolvare. Volumul cubic care revine în medie unei molecule este $d^3 = V/N$, dar $p = (N/V)kT \rightarrow d^3 = kT/p$, (1)
 unde d este chiar distanța medie dintre molecule :

$$d = \sqrt[3]{kT/p} = 3,3 \text{ nm} . \quad (2)$$

2.2.24. Un gaz ideal se destinde adiabetic în vid de la volumul V_1 la volumul V_2 . Calculați variația entropiei în acest proces.

Rezolvare. Entropia este o **funcție de stare**. Pentru a afla variația de entropie între două stări de echilibru, putem alege orice proces *cvasistatic*, de echilibru (reversibil), care unește cele două stări și să calculăm variația de entropie în acest proces; rezultatul nu depinde de procesul ales, ci numai de stările inițială și finală.

În cazul nostru, gazul fiind izolat *adiabetic nu* schimbă căldură cu mediul și destinzându-se în *vid*, nu efectuează lucru mecanic, deci $\Delta U = Q - L = 0$: variația energiei interne este zero. Dar $\Delta U = \nu C_V \Delta T$ (amintim experiența și legea lui *J. P. Joule* 1843 cu privire la energia internă a gazului ideal), rezultă $\Delta T = 0$, adică temperatura nu se schimbă .

Acum este foarte ușor de imaginat un proces *cvasistatic* care să unească cele două stări, și anume : o transformate **izotermă**. Dar atunci variația entropiei este:

$$\Delta S = Q / T = \nu R \ln(V_2 / V_1) > 0 .$$

Procesul este *ireversibil* în sensul că sistemul nu poate reveni la starea inițială fără o intervenție specială, activă , a mediului.

Reamintim că , dacă sistemul este izolat sau adiabetic izolat, atunci pentru procesele ireversibile entropia **crește**. Pentru sistemul izolat entropia va crește până ajunge la un maximum când sistemul ajunge la **echilibru**.

2.2.25. Într-un tub subțire de secțiune $S = 4,00 \text{ mm}^2$ și lungime $\ell = 40,5 \text{ cm}$, închis la un capăt și așezat orizontal, se află în echilibru o picătură de mercur de masă $m = 0,50 \text{ g}$ la distanța $\ell_0 = 20,3 \text{ cm}$ de fundul tubului. La ce turație trebuie adus rapid tubul pentru ca mercurul să iasă din tub? Presiunea atmosferică este normală.

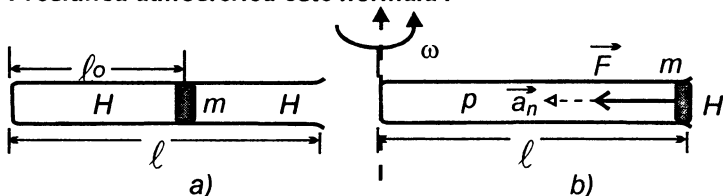


Fig.2.2.25

Rezolvare. Tubul fiind adus *rapid* la turația necesară, putem considera că aerul închis în tub nu are timp să facă schimb de căldură cu mediul exterior, deci suferă o transformare **adiabatică**. De asemenea, vom considera că în tub presiunea este peste tot aceeași (tub scurt, turație mică).

La limită, când picătura este la marginea tubului, *lex secunda* din mecanică pentru mișcarea circulară a picăturii se scrie (pe direcție radială) :

$$F = (H - p) S = ma_n = m\omega^2 \ell . \quad (1)$$

Legea transformării **adiabactice** :

$$H(S\ell_0)^\gamma = p(S\ell)^\gamma \rightarrow p = H(\ell_0/\ell)^\gamma , \quad (2)$$

care introdus în (1) dă : $n^2 = \omega^2 / (4\pi^2) =$

$$= H(1 - \ell_0^\gamma/\ell^\gamma)S : (m\ell) = 31,36 \text{ rot}^2/\text{s}^2 , \quad n = 5,6 \text{ rot/s} . \quad (3)$$

2.2.26. Două vase identice, izolate termic de exterior, sunt legate între ele printr-un mic tub cu robinet. În primul vas există o cantitate de gaz la presiunea $p = 100 \text{ kPa}$ și temperatura $t_1 = 27^\circ\text{C}$, iar în celălalt vas același gaz, la aceeași presiune, dar la temperatura $t_2 = 227^\circ\text{C}$. Aflați presiunea și temperatura după deschiderea robinetului și stabilirea echilibrului termic.

Rezolvare. Conservarea numărului de moli dă ecuația :

$$pV/(RT_1) + pV/(RT_2) = p' \cdot 2V/(RT') . \quad (1)$$

Pe de altă parte, energia internă se scrie

$$\Delta U = \nu C_V \Delta T = (C_V/R) \cdot \nu R \Delta T = (C_V/R) \cdot \Delta(pV) . \quad (2)$$

Energia internă a întregului gaz se conservă (nu face schimb de căldură și de lucru mecanic cu exteriorul) :

$$(C_V / R) p' \cdot 2V - 2(C_V / R) pV \rightarrow p' = p, \quad (3)$$

atunci (1) dă :

$$T' = 2T_1 T_2 : (T_1 + T_2) = 375 \text{ K} = 102^\circ\text{C}.$$

2.2.27. Într-un vas termoizolat de volum $V = 22,4 \text{ L}$, conținând $v_1 = 1,00 \text{ mol}$ de hidrogen la temperatura $T_1 = 200 \text{ K}$, se introduce o masă $m_2 = 4,0 \text{ g}$ de hidrogen la temperatura T_2 . După stabilirea echilibrului presiunea a devenit $p' = 300 \text{ kPa}$. Aflați T_2 .

Rezolvare. Conservarea numărului de moli la amestecarea gazelor dă ecuația :

$$v_1 + m_2 / \mu = p' V / (RT'). \quad (1)$$

Conservarea energiei interne (care depinde numai de temperatură) :

$$v_1 C_V T_1 + (m_2 / \mu) C_V T_2 = C_V \cdot p' V / R, \quad (3)$$

$$T_2 = (p' V / R - v_1 T_1) : (m_2 / \mu) = 310 \text{ K}. \quad (4)$$

2.2.28. În două vase termoizolate, de volume $V_1 = 50,0 \text{ L}$, $V_2 = 25,0 \text{ L}$, legate printr-un tub cu robinet, se află $m_1 = 1,68 \text{ kg}$ azot la presiunea $p_1 = 3,0 \text{ MPa}$, respectiv $m_2 = 0,120 \text{ kg}$ Ar la $p_2 = 0,50 \text{ MPa}$. Ce presiune și ce temperatură se stabilesc în vase dacă deschidem robinetul ?

Rezolvare. Conservarea numărului de moli dă ecuația :

$$m_1 / \mu_1 + m_2 / \mu_2 = p' (V_1 + V_2) / (RT'). \quad (1)$$

Pe de altă parte, conservarea energiei interne dă ecuația :

$$v_1 C_{V1} T_1 + v_2 C_{V2} T_2 = v_1 C_{V1} T' + v_2 C_{V2} T'. \quad (2)$$

Înlocuim aici numărul de moli astfel $v = m / \mu = pV / (RT)$:

$$C_{V1} p_1 V_1 / R + C_{V2} p_2 V_2 / R = [(m_1 / \mu_1) C_{V1} + (m_2 / \mu_2) C_{V2}] T' \quad (3)$$

$$\rightarrow T' = (C_{V1} p_1 V_1 + C_{V2} p_2 V_2) : [R(C_{V1} m_1 / \mu_1 + C_{V2} m_2 / \mu_2)] = 306 \text{ K}. \quad (4)$$

Atunci (1) dă :

$$p' = (m_1 / \mu_1 + m_2 / \mu_2) RT' : (V_1 + V_2) = 2,10 \text{ MPa}. \quad (5)$$

2.2.29. Un cilindru orizontal termoizolat de volum $V_0 = 10,0 \text{ L}$, umplut cu heliu, este împărțit în două compartimente printr-un piston termoizolant, care se poate mișca etanș fără frecări. Se comunică gazului din vasul V_1 o cantitate de căldură $Q = 100 \text{ J}$. Aflați cu cât crește presiunea în vase după stabilirea echilibrului.

Rezolvare. Scriem ecuația de stare pentru fiecare vas :

$$pV_1 = (m_1 / \mu) RT, \quad pV_2 = (m_2 / \mu) RT; \quad (1)$$

$$(p + \Delta p)(V_1 + \Delta V) = (m_1 / \mu) RT_1, \quad (p + \Delta p)(V_1 - \Delta V) = (m_2 / \mu) RT_2. \quad (2)$$

Adunăm ecuațiile (1) între ele și ecuațiile (2) între ele :

$$pV_0 = (m_1/\mu + m_2/\mu)RT, \quad (p + \Delta p)V_0 = (m_1/\mu)RT_1 + (m_2/\mu)RT_2 \quad (3)$$

$$\rightarrow \Delta pV_0 = (m_1/\mu)R(T_1 - T) + (m_2/\mu)R(T_2 - T). \quad (4)$$

Scriem *principiul I* al termodinamicii pentru gazul din vasul 1 :

$$Q = \Delta U_1 + L_1 \quad (5)$$

$$\text{și pentru vasul 2:} \quad 0 = \Delta U_2 - L_1 \quad (6)$$

$$\rightarrow Q = \Delta U_1 + \Delta U_2 = (m_1/\mu)C_V(T_1 - T) + (m_2/\mu)C_V(T_2 - T). \quad (7)$$

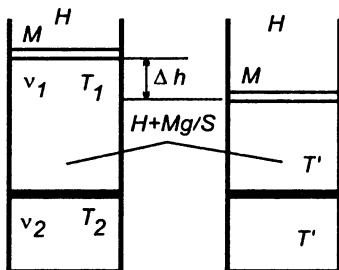
Folosim această ecuație în (4) :

$$\Delta pV_0 = QR/C_V \rightarrow \Delta p = (R/C_V)(Q/V_0) = (2/3) Q/V_0 = 6,67 \text{ kPa}, \quad (8)$$

unde pentru gaze *monoatomice* $C_V = 3R/2$.

2.2.30. Un cilindru vertical izolat termic este despărțit în două părți printr-un perete fix, conductor de căldură. Deasupra peretelui se află $v_1 = 1,00$ mol de gaz monoatomic la temperatura $T_1 = 420$ K închis cu un piston de masă $M = 10,0$ kg și secțiune $S = 90$ cm², care se poate mișca etanș fără frecări. În partea inferioară, sub perete, se află $v_2 = 1,50$ mol din același gaz la temperatura $T_2 = 400$ K. Cu cât coboară pistonul și care va fi temperatura finală la echilibru ? Presiunea atmosferică este $H = 100$ kPa.

Fig.2.2.30



Rezolvare. Gazul de sub piston se află la presiune constantă, deci suferă o transformare *izobară*. Căldura cedată de gazul 1 gazului 2 :

$$v_1 C_p(T_1 - T') = v_2 C_V(T' - T_2). \quad (1)$$

Pe de altă parte *principiul I* al termodinamicii pentru gazul 1 :

$$\begin{aligned} Q_1 = v_1 C_p(T' - T_1) &= \Delta U_1 + L_1 = v_1 C_V(T' - T_1) + p\Delta V = \\ &= v_1 C_V(T' - T_1) + (H + Mg/S) \cdot S\Delta h. \end{aligned} \quad (2)$$

Din ecuația (1) obținem (la gazele *monoatomice* $C_p/C_V = \gamma = 5/3$):

$$\begin{aligned} T' &= (v_1 C_p T_1 + v_2 C_V T_2) : (v_1 C_p + v_2 C_V) = \\ &= (v_1 \gamma T_1 + v_2 T_2) : (v_1 \gamma + v_2) = 410,5 \text{ K}. \end{aligned} \quad (3)$$

Din ecuațiile (1) și (2) avem

$$-v_2 C_v (T' - T_2) = v_1 C_v (T' - T_1) + (H + Mg/S) \cdot S \Delta h, \quad (4)$$

$$\Delta h = -[1 : (HS + Mg)] v_1 v_2 R (T_1 - T_2) : (v_1 \gamma + v_2) = -8,0 \text{ cm} \quad (5)$$

(pistonul coboară).

2.2.31. Un tub cilindric orizontal închis, de secțiune S , este împărțit în n compartimente egale cu ajutorul a $n - 1$ pistoane, care se pot mișca etanș fără frecări. Inițial presiunea în toate compartimentele este aceeași p . Aflați presiunea din fiecare compartiment când tubul este adus în poziție verticală, precum și masele pistoanelor, știind că în acest caz volumele celor n compartimente se raportează între ele ca primele n numere naturale.

Rezolvare. Conform enunțului :

$$V_1 : V_2 : V_3 : \dots : V_n = 1 : 2 : 3 : \dots : n \rightarrow V_k = k V_1, \quad (1)$$

$$\text{dar } V = V_1 + V_2 + \dots + V_n = V_1(1 + 2 + \dots + n) = (1/2)n(n + 1)V_1. \quad (2)$$

Gazele din fiecare compartiment suferă o transformare izotermă :

$$p V / n = p_k V_k \rightarrow p_k = p(n + 1) / (2k) = p_1 / k, \quad p_1 = p(n + 1) / 2. \quad (3)$$

Dar diferența de presiune dintre două compartimente vecine (în poziția verticală a cilindrului, când V_1 este jos, iar V_n este sus) se datorează presiunii pistonului respectiv:

$$p_k = p_{k+1} + m_k g / S. \quad (4)$$

Folosind (3) găsim de aici masele pistoanelor :

$$p_1 / k = p_1 / (k + 1) + m_k g / S \rightarrow m_k = (Sp / g)(n + 1) / [2k(k + 1)]. \quad (5)$$

2.2.32. Două pompe de vid de aceeași turație videază un volum $V = 1,00 \text{ L}$ de la presiunea inițială H , până la aceeași presiune finală p , conform graficelor din figură în care $\text{tg } \alpha = 0,50$, $\text{tg } \beta = 1,00$. Volumul de lucru el primei pompe este $v_1 = 100 \text{ cm}^3$. Aflați volumul de lucru al pompei 2.

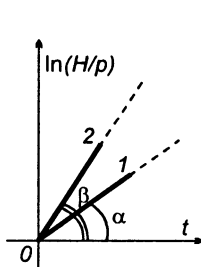


Fig.2.2.32

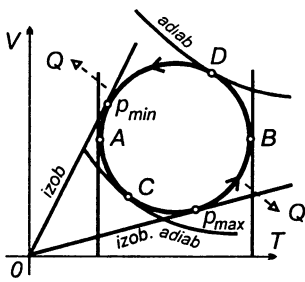


Fig.2.2.33

Rezolvare. La prima tură a pompei aerul din vasul V se destinde *izoterm* de la volumul V la $V + v$ și presiunea devine

$$p_1 = H \cdot V / (V + v), \quad (1)$$

după care se evacuează volumul de aer v la această presiune.

La a doua tură aerul din V , aflat acum la presiunea p_1 , se destinde din nou, analog, de la V la $V + v$ și presiunea devine:

$$p_2 = p_1 \cdot V / (V + v) = H [V / (V + v)]^2, \dots, p_N = H [V / (V + v)]^N \quad (2)$$

sau

$$p(t) = H [V / (V + v)]^{nt}, \quad \ln(H / p) = nt \cdot \ln[(V + v) / V]. \quad (3)$$

De aici se vede că *pantele* dreptelor din figură sunt

$$\operatorname{tg} \alpha = n \ln(1 + v_1 / V), \quad \operatorname{tg} \beta = n \ln(1 + v_2 / V), \quad (4)$$

de unde rezultă : $(1 + v_1 / V)^{\operatorname{tg} \beta} = (1 + v_2 / V)^{\operatorname{tg} \alpha}$,

$$v_2 = V [(1 + v_1 / V)^{\operatorname{tg} \beta / \operatorname{tg} \alpha} - 1] = 210 \text{ cm}^3. \quad (5)$$

2.2.33. Un proces parcurs de gaz perfect este reprezentat în diagrama V - T printr-un cerc, parcurs în sens trigonometric. Arătați grafic pe ce porțiuni a ciclului gazul : a) are presiune maximă, respectiv minimă, b) efectuează lucru mecanic pozitiv, c) primește căldură, d) are căldură specifică negativă.

Rezolvare. Observăm că în diagrama $V - T$ adiabata seamănă cu cea din diagrama $p - V$.

Ducem familia de *adiabate* ; două adiabate vor fi tangente la ciclu, acolo: $Q = 0$. Pe porțiunea CBD gazul primește căldură ($dQ = TdS > 0$), iar pe porțiunea DAC cedează căldură ($dQ = TdS < 0$). Pe porțiunea BD (respectiv AC) căldura specifică $C = Q / (v\Delta T)$ este *negativă*, deoarece gazul, deși primește căldură ($Q > 0$), se răcește, $\Delta T < 0$, aceasta înseamnă că efectuează mai mult lucru mecanic decât căldura primită, pe seama scăderii energiei interne (de aceea scade temperatura).

Din ecuația de stare avem

$$V = [mR / (\mu p)] \cdot T, \quad (1)$$

deci *panta* izobarelor este *invers* proporțională cu presiunea.

Lucrul mecanic este pozitiv pe porțiunea pe care crește volumul ($\Delta V > 0$).

2.2.34. Un gaz ideal parcurge ciclul din figură. Se dau : $t_1 = 27^\circ\text{C}$, $V_1 = 5,0 \text{ L}$, $t_3 = 127^\circ\text{C}$, $V_3 = 6,0 \text{ L}$ și volumul V_1 în condiții normale : $V_{10} = 10,0 \text{ L}$. Aflați lucrul mecanic efectuat de gaz într-un ciclu. Reprezentați ciclul și în diagramele $p - V$, $p - T$.

Rezolvare. Transformările izobară 4 - 1 și izocoră 3 - 4 dau:

$$V_3/V_1 = V_4/V_1 = T_4/T_1;$$

$$p_2/p_1 = p_3/p_4 = T_3/T_4 = T_3/(T_1 V_3/V_1). \quad (1)$$

Lucrul mecanic efectuat este egal cu aria ciclului în diagrama $p - V$:

$$\begin{aligned} L &= (p_2 - p_1)(V_3 - V_1) = [p_1 T_3 V_1 / (T_1 V_3) - p_1](V_3 - V_1) = \\ &= (p_1 V_1 / T_1)(T_3 / V_3 - T_1 / V_1)(V_3 - V_1) = \\ &= (p_0 V_{10} / T_0)(T_3 / V_3 - T_1 / V_1)(V_3 - V_1) = 24,7 \text{ J}, \end{aligned} \quad (2)$$

unde am adus produsul $p_1 V_1 / T_1$ la condiții normale de presiune și temperatură (altfel nu-l cunoaștem pe p_1).

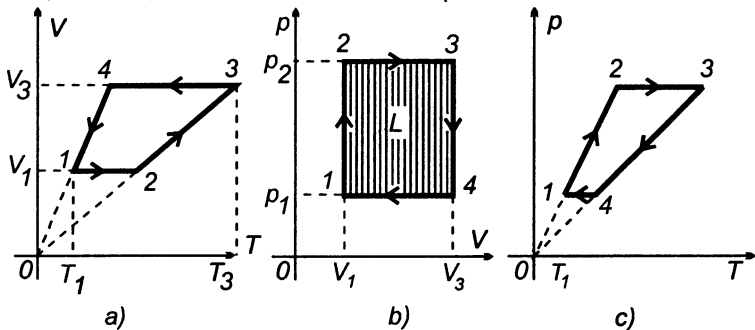


Fig.2.2.34

2.2.35. Un mol de gaz ideal aflat inițial la temperatura T_1 și presiunea p_1 , se destinde după legea $T = aV - bV^2$, $a, b =$ constante date. Se cunoaște exponentul adiabatic γ și constanta R . Aflați căldura absorbită dacă volumul final $V_2 = nV_1, n > 1$.

Rezolvare. Conform ecuației de stare:

$$pV = \nu RT = \nu R (aV - bV^2) \rightarrow p = \nu R (a - bV), \quad (1)$$

ceea ce se reprezintă printr-o linie dreaptă în diagrama $p - V$. Lucrul mecanic este dat de aria de sub graficul procesului în diagrama $p - V$ (trapezul din figură):

$$L = (1/2) (p_1 + p_2)(V_2 - V_1) = (1/2) \nu R(2a - bV_1 - bV_2)(V_2 - V_1). \quad (1)$$

Variația energiei interne este

$$\Delta U = \nu C_v \Delta T = [\nu R / (\gamma - 1)][a(V_2 - V_1) - b(V_2^2 - V_1^2)], \quad (2)$$

$$\text{unde } C_v = R / (\gamma - 1), C_p = \gamma R / (\gamma - 1), C_p - C_v = R, \gamma = C_p / C_v. \quad (3)$$

Căldura absorbită se obține din principiul I

$$\begin{aligned} Q &= \Delta U - L = [\nu R / (\gamma - 1)] (V_2 - V_1)[a - b(V_1 + V_2)] - \\ &\quad - \nu R (V_2 - V_1)[a - b(V_1 + V_2) / 2]. \end{aligned} \quad (4)$$

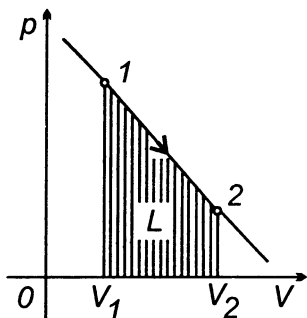


Fig. 2.2.35

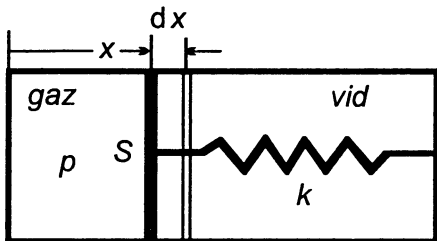


Fig. 2.2.37

(*) **2.2.36. Aflați căldura molară a unui gaz într-un proces descris de ecuația $p = a\sqrt{T}$, unde $a = \text{const}$. Se cunoaște C_v . Reprezentați procesul în diagramele $p - V$, $V - T$, $p - T$.**

Rezolvare. Prin definiție $C = dQ : (vdT)$, dar $dQ = dU + pdV$:
 $C = (dU + pdV) / (vdT) = (vC_v dT + pdV) / (vdT) = C_v + pdV / (vdT)$, (1)

dar $V = vRT / p = vR\sqrt{T} / a$, de unde derivata cerută de (1):

$$dV/dT = (vR/a) \cdot [1 : (2\sqrt{T})], \quad (2)$$

care introdusă în (1) dă:

$$C = C_v + (p/v) \cdot (vR/a) \cdot [1 : (2\sqrt{T})] = C_v + R/2. \quad (3)$$

Dealtfel procesul dat este o **politropă**: $p = \text{const} \cdot \sqrt{pV}$ sau

$$\text{ridicând la pătrat: } pV^{-1} = \text{const}, \text{ deci } k = -1 \quad (4)$$

și conform problemei 2.2.47:

$$C = C_v + R / (1 - k) = C_v + R/2. \quad (5)$$

Graficele procesului sunt la fel ca la problema 2.2.45.

Dealtfel, procesul (4) se reprezintă în diagrama $p - V$ printr-o **dreaptă** trecând prin origine, deci lucrul mecanic se calculează ca **aria** trapezului de sub grafic. Mai departe se poate judeca elementar, ca la problema 2.2.45.

(*) **2.2.37. Cilindrul din figură conține gaz perfect cu căldura molară C_v cunoscută, pistonul se deplasează etanș fără frecări, iar lungimea resortului nedeformat este egală cu lungimea cilindrului. Aflați căldura molară a gazului în aceste condiții, neglijând capacitatea calorică a cilindrului, pistonului și resortului.**

$$\text{Rezolvare. Condiția de echilibru a pistonului } pS = kx \quad (1)$$

$$\text{dă prin diferențiere } Sdp = kdx. \quad (2)$$

Să prelucrăm expresia căldurii absorbite :

$$dQ = dU + dL = \nu C_V dT + pSdx = \nu C_V dT + kx dx , \quad (3)$$

$$\nu R dT = d(p \cdot Sx) = Sx dp + Sp dx = 2kx dx ,$$

de unde $kx dx = (1/2) \nu R dT$ (4)

și atunci $dQ = \nu C_V dT + (1/2) \nu R dT = \nu (C_V + R/2) dT ,$ (5)

de unde prin definiție : $C = dQ / (\nu dT) = C_V + R/2 .$ (6)

Dealtfel gazul suferă o transformare **politropică** :

$$pS = kx = (k/S) V \text{ sau } pV^{-1} = k/S^2 = \text{const} , \text{ deci } k = -1 \quad (7)$$

și conform problemei 2.2.47: $C = C_V + R / (1 - k) = C_V + R/2 .$ (8)

Graficele sunt aceleași ca la problema 2.2.45.

Procesul (7) se reprezintă în diagrama $p - V$ printr-o **dreaptă** trecând prin origine, deci lucrul mecanic se poate calcula ca **aria** trapezului de sub grafic. Mai departe, judecând cu variații mici ΔT , Δx , etc., putem obține rezultatul fără a folosi derivate.

(*) 2.2.38. Într-un cilindru vertical sub piston se află gaz diatomic perfect. Pistonul are masa $M = 10,0$ kg, aria $S = 100$ cm² și se mișcă etanș fără frecări. Ce cantitate de căldură pe unitatea de timp trebuie comunicată gazului pentru ca pistonul să se deplaseze cu viteza $v = 0,40$ m/s ? Presiunea atmosferică este $p_0 = 100$ kPa .

Rezolvare. Transformarea este **izobară** la presiunea

$$p = p_0 + Mg / S = \text{const} . \quad (1)$$

$$dQ = \nu C_p dT = (C_p / R) \nu R dT = (C_p / R) p dV =$$

$$= (C_p / R) \cdot p S v dt = (C_p / R) (p_0 S + Mg) v dt , \quad (2)$$

de unde căldura pe unitate de timp : $dQ / dt =$

$$= (C_p / R) (p_0 S + Mg) \cdot v = [\gamma / (\gamma - 1)] (p_0 S + Mg) v = 1,54 \text{ kJ/s} \quad (3)$$

$$(R = C_p - C_V , \quad \gamma = C_p / C_V) .$$

Problema se poate rezolva foarte ușor și fără derivate, judecând cu variații mici :

$$Q = \nu C_p \Delta T = (C_p / R) \cdot p \Delta V = (C_p / R) \cdot p S v \Delta t ,$$

$$Q^* = Q / \Delta t = (C_p / R) \cdot p S v = (C_p / R) (p_0 S + Mg) \cdot v , \text{ etc.}$$

*** 2.2.39. Un gaz perfect se destinde după legea $pV^2 = \text{const}$. Aflați căldura molară în această transformare.**

Rezolvare. Plecăm de la definiția căldurii molare și folosim principiul I :

$$C = dQ / (\nu dT) = (dU + p dV) / (\nu dT) = (\nu C_V dT + p dV) / (\nu dT) = C_V + p dV / (\nu dT) , \quad (1)$$

dar $pV^2 = \text{const} = pV \cdot V = \nu RT \cdot V = \text{const}$ sau $TV = \text{const}$, (2)

care, prin derivare *logaritmică* (întâi logaritmăm, apoi diferențiem),
dă $dT/T + dV/V = 0$ sau $dV/dT = -V/T$ (3)

și introdus în (1), dă $C = C_v - pV/(vT) = C_v - R$. (4)

Dealtfel, transformarea dată este *politropică* cu exponentul (indicele) politropic $k = 2$ și conform problemei 2.2.47 :

$$C = C_v + R/(1 - k) = C_v - R. \quad (5)$$

* 2.2.40. Un gaz monoatomic perfect suferă următoarele transformări : 1-2 izobară cu $V_2 = nV_1$, $n = 1,5$; 2-3 după legea $p = \text{const} \cdot V$ cu $V_3 = V_2/k$, $k = 3,0$; 3-4 izobară cu $V_4 = V_1$ și 4-1 izocoră. Știind căldura cedată $|Q_{23}|$ aflați căldura absorbită Q_{41} . Reprezentați ciclul în diagramele $p - V, V - T, p - T$.

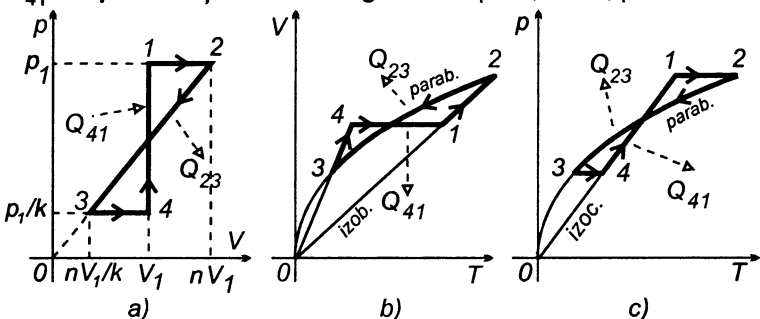


Fig.2.2.40

Rezolvare. Să calculăm căldura molară în transformarea 2-3, a cărei ecuație este $p = \text{const} \cdot V$. Atunci ecuația de stare dă :

$$pV = vRT, \quad \text{const} \cdot V^2 = vRT, \quad (1)$$

de unde derivata *logaritmică* :

$$2 dV/V = dT/T, \quad dV/dT = V/(2T). \quad (2)$$

Căldura molară este prin definiție : $C = dQ/(vdT) =$

$$\begin{aligned} &= (dU + pdV)/(vdT) = (C_v dT + pdV)/(vdT) = C_v + pdV/(vdT) = \\ &= C_v + pV/(2vT) = C_v + R/2 = 2R, \quad (C_v = 3R/2). \end{aligned} \quad (3)$$

Dealtfel, transformarea 2 - 3 este *politropică* : $pV^{-1} = \text{const}$, deci $k = -1$, și conform problemei 2.2.47 :

$$C = C_v + R/(1 - k) = C_v + R/2. \quad (4)$$

$$\begin{aligned} |Q_{23}| &= vC(T_2 - T_3) = 2(vRT_2 - vRT_3) = 2(p_1 nV_1 - p_1 nV_1/k^2) = \\ &= 2p_1 V_1 (k^2 - 1) n / k^2, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{de unde } p_1 V_1 = |Q_{23}| k^2 : [2n(k^2 - 1)] . \quad (6)$$

$$\begin{aligned} Q_{41} &= \nu C_V (T_1 - T_4) = \nu (3R/2)(T_1 - T_4) = (3/2)(p_1 V_1 - p_1 V_1/k) = \\ &= (3/2)[(k - 1)/k] p_1 V_1 = (3/2)[(k - 1)/k] |Q_{23}| k^2 : [2n(k^2 - 1)] = \\ &= (3/4) |Q_{23}| \cdot k : [n(k + 1)] = (3/8) |Q_{23}| . \end{aligned} \quad (7)$$

Fie $p = a \cdot V$ ecuația transformării 2 - 3, atunci ecuația de stare devine :

$$pV = a \cdot V^2 = \nu RT - \text{parabolă} ; \quad pV = p^2/a = \nu RT - \text{parabolă} \quad (8)$$

(V. figura) .

* **2.2.41. Un gaz perfect suferă o transformare descrisă de ecuația $p = p_0 - aV$, ($p_0 > 0$, $a > 0$ - constante). Pe ce porțiune a transformării: a) gazul se încălzește, respectiv se răcește ? b) gazul primește căldură, respectiv cedează căldură ? Trasați graficele corespunzătoare.**

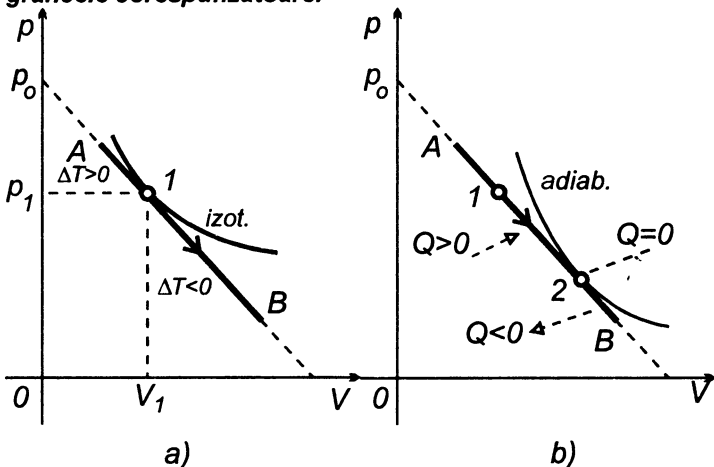


Fig.2.2.41 a, b

Rezolvare. a) Dacă intersectăm graficul procesului cu familia de *izoterme*, atunci se vede că în procesul de la A la B temperatura crește, atinge un maxim $T_{\max} = T_1$ într-un punct 1, apoi scade. Punctele de intersecție dintre graficul procesului și graficul izotermei sunt rădăcinile sistemului :

$$p = p_0 - aV, \quad pV = \nu RT, \quad (T - \text{parametru}) \quad (1)$$

sau înlocuind p din prima ecuație în a doua :

$$aV^2 - p_0V + \nu RT = 0, \quad (2)$$

deci pentru T dat sunt *două* puncte de intersecție : reale distincte, reale confundate sau complex conjugate. Punctul 1 cu T_{\max} corespunde rădăcinii *duble* când izoterma este *tangentă* la graficul procesului, deci *discriminantul* ecuației (2) trebuie să fie zero :

$$D = p_0^2 - 4v aRT = 0, \quad (3)$$

de unde $T_{\max} = T_1 = p_0^2 : (4v aR), \quad (4)$

apoi din (2): $V_1 = p_0 / (2a), \quad p_1 = p_0 / 2. \quad (5)$

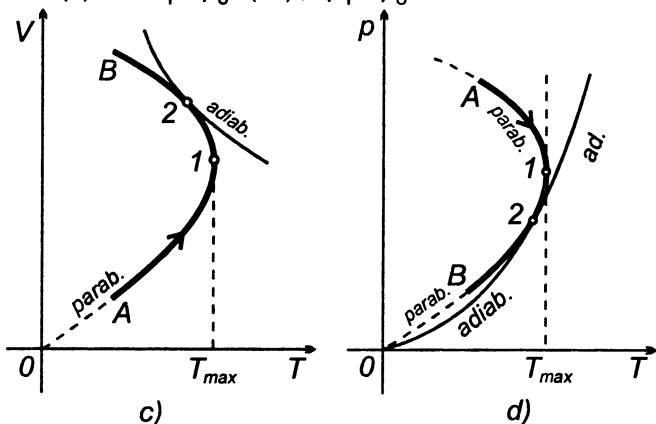


Fig.2.2.41 c, d

Se poate judeca și altfel : Scoatem temperatura T din (2) :

$$T = (p_0 V - aV^2) / (vR) = f(V). \quad (6)$$

Extremele unei funcții corespund *rădăcinilor* derivatei, deci anulăm derivata :

$$T'(V) = f'(V) = (p_0 - 2aV) / (vR) = 0, \quad (7)$$

de unde $V_1 = p_0 / (2a), \text{ etc.}$

Natura extremului se obține din *semnul* derivatei a doua (sau din *variația* semnelui derivatei întâia) : $f''(V) = (-2a) / (vR) < 0,$ (8) deci extremul este un *maxim*.

b) Să căutăm punctul în jurul căruia, într-un proces *elementar*, $dQ = 0 : dQ = dU + pdV = vC_V dT + pdV = 0.$ (9)

Diferențiem ecuația procesului (1) și ecuația de stare :

$$dp = -a dV, \quad vRdT = pdV + Vdp = pdV + V(-a dV) = (p - a) dV = (2p - p_0) dV, \text{ de unde } dV = vRdT : (2p - p_0). \quad (10)$$

Acum ecuația (9) devine :

$$dQ = vC_V dT + p [vR / (2p - p_0)] dT = v[C_V + pR / (2p - p_0)] dT = 0, \quad (11)$$

de unde $C_v + pR / (2p - p_0) = 0$ sau

$$p_2 = p_0 : [2 + R / C_v] = p_0 / (1 + \gamma), \quad (R = C_p - C_v). \quad (12)$$

Din ecuația procesului rezultă acum V_2 :

$$V_2 = (p_0 - p_2) / a = [\gamma / (1 + \gamma)] p_0 / a \quad (13)$$

și din ecuația de stare:

$$T_2 = p_2 V_2 : (vR) = [\gamma / (1 + \gamma)^2] p_0^2 / (vaR). \quad (14)$$

Alt mod : Deoarece pe adiabată $Q = 0$, punctul 2 trebuie să fie punctul de *tangență* al unei adiabate cu graficul procesului, astfel încât pe o porțiune *infinitesimală* cele două curbe să coincidă și acolo să nu se facă schimb de căldură, deci intersecția unei adiabate $pV^\gamma = b$ cu curba procesului $p = p_0 - aV$ trebuie să dea două puncte *confundate* (condiția de tangență !), prin urmare ecuația

$$f(V) = (p_0 - aV) \cdot V^\gamma - b = 0 \quad (15)$$

trebuie să aibă rădăcină *dublă* în V , deci *derivata* funcției $f(V)$ trebuie să aibă rădăcină *simplă*: $f'(V) =$

$$= \gamma p_0 V^{\gamma-1} - a(\gamma+1)V^\gamma = 0 \text{ sau } V^{\gamma-1} [\gamma p_0 - a(\gamma+1)V] = 0, \quad (16)$$

de unde regăsim rezultatul anterior: $V_2 = [\gamma / (1 + \gamma)] p_0 / a$, etc. (17)

Conform formulelor (5) și (12):

$$p_1 = p_0 / 2 > p_2 = p_0 / (1 + \gamma), \quad (\text{totdeauna } \gamma > 1), \quad (18)$$

deci cele două puncte *nu coincid*, punctul 1 fiind mai sus de punctul 2. De la 1 la 2 gazul se destinde și se răcește, deși primește căldură (căldura specifică este *negativă* !), efectuând un lucru mecanic mai mare decât căldura primită, pe seama scăderii energiei interne.

Graficele procesului *liniar* A - B în diagramele $V - T$ și $p - T$ sunt *parabole*.

O altă cale de a găsi punctul 2 este de a folosi noțiunea de **entropie**, așa cum se face în problema 2.3.28.

* **2.2.42. Aflați căldura molară a unui gaz perfect în procesul $p = aV^n$, știind căldura sa molară izocoră și constanta R .**

Rezolvare. $dQ = dU + pdV = vC_v dT + aV^n dV,$ (1)

dar $vRT = pV = aV^{n+1}$ (2)

care prin diferențiere dă $vRdT = a(n+1)V^n dV$ (3)

și introducând în (1): $dQ = vC_v dT + vRdT / (n+1) =$

$$= v[C_v + R / (n+1)] dT = vCdT, \quad (4)$$

de unde rezultă căldura molară (prin definiție) :

$$C = dQ / (vdT) = C_v + R / (n+1). \quad (5)$$

Dealtfel, transformarea dată este **politropică** : $pV^{-n} = \text{const}$, $k = -n$, și conform problemei 2.2.47 :

$$C = C_v + R / (1 - k) = C_v + R / (n + 1) . \quad (6)$$

* **2.2.43. Într-un cilindru vertical de secțiune S se află gaz închis de un piston de masă m , situat, la echilibru, la înălțimea h . Presiunea atmosferică este p_0 . Aflați perioada micilor oscilații ale pistonului considerând că procesul poate fi aproximat de o politropă $pV^k = \text{const}$.**

Rezolvare. Oscilațiile fiind *mic*, variațiile de volum și de presiune sunt *foarte mici* și le putem calcula ca **diferențiale**.

$$\text{Ecuația politropei} \quad pV^k = \text{const} \quad (1)$$

dă prin derivare **logaritm**ică (întâi logarităm, apoi diferențiem):

$$dp/p + k dV/V = 0, \quad dp = -k(p/V) dV, \quad (2)$$

$$\text{deci pentru variații foarte mici: } \Delta p = -k(p/V) \Delta V. \quad (3)$$

Notând cu x elongația (foarte mică) a pistonului de la poziția sa de echilibru, avem $\Delta V = S \cdot x$, deci

$$\Delta p = -k(pS/V) \cdot x \cong -(k p/h) x \cong -(k/h)(p_0 + mg/S) x, \quad (4)$$

$$F = \Delta p \cdot S = -(k/h)(p_0 S + mg) \cdot x = -C x, \quad (5)$$

deci forța este de tip **elastic** cu constanta **cvasielast**ică :

$$C = (k/h)(p_0 S + mg), \quad (6)$$

prin urmare, perioada **micilor oscilații** :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{C}} = 2\pi \sqrt{\frac{mh}{p_0 S + mg} \frac{1}{k}}, \quad k > 0. \quad (7)$$

În particular, pentru oscilații mici **adiabatic**e : $k = \gamma$.

(* *) **2.2.44. Un gaz diatomic perfect se destinde după legea $p = aV$, unde $a = 1,00 \cdot 10^8 \text{ N/m}^5$, de la un volum $V_1 = 1,00 \text{ L}$ până la un volum $V_2 = 2,00 \text{ L}$. Calculați : a) lucrul mecanic efectuat de gaz, b) variația energiei interne, c) căldura absorbită și căldura molară în această transformare.**

$$\begin{aligned} \text{Rezolvare. a) } L &= \int dL = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} aV dV = \frac{1}{2} a (V_2^2 - V_1^2) = \\ &= 150 \text{ J} . \end{aligned} \quad (1)$$

Știind interpretarea **geometrică** a lucrului mecanic efectuat de un gaz la destindere, putem calcula foarte ușor, fără integrale, lucrul mecanic în cazul procesului nostru care se reprezintă printr-o linie **dreaptă** care trece prin origine în diagrama $p - V$ și deci lucrul mecanic este egal cu **aria** trapezului de sub graficul procesului.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \Delta U &= \nu C_V(T_2 - T_1) = (C_V/R)(\nu RT_2 - \nu RT_1) = \\
 &= (C_V/R)(p_2 V_2 - p_1 V_1) = (C_V/R)a(V_2^2 - V_1^2) = \\
 &= (C_V/R) \cdot 2L = 5L = 750 \text{ J}, \quad (C_V = 5R/2). \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \quad Q = \Delta U + L = 900 \text{ J}, \quad \Delta U = \nu C_V \Delta T, \quad (3)$$

dar din (2): $L = \Delta U \cdot R / (2C_V)$, rezultă atunci

$$Q = \nu C_V \Delta T [1 + R / (2C_V)] = \nu C \Delta T, \quad (4)$$

prin urmare,

$$C = Q / (\nu \Delta T) = C_V + R/2 = 3R = 24,9 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K}). \quad (5)$$

Dealtfel procesul este *politropic*: $pV^{-1} = a = \text{const}$, $k = -1$, atunci (v. problema 2.2.47):

$$C = C_V + R / (1 - k) = C_V + R/2 = 3R. \quad (6)$$

(* *)2.2.45. O masă m de gaz perfect cu masa molară μ suferă un proces descris de legea $T \sim p^2$, de la T_1 la T_2 . Aflați lucrul mecanic efectuat de gaz și căldura molară în această transformare. Reprezentați procesul în diagramele p - V , V - T , p - T .

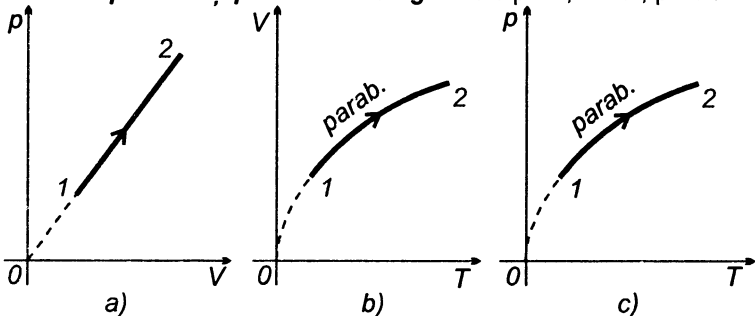


Fig.2.2.45

Rezolvare. $T = ap^2$, deci $pV = (m/\mu)R \cdot ap^2$

$$\text{sau} \quad V = (m/\mu)R ap, \quad (1)$$

$$\text{care prin diferențiere dă:} \quad dV = (m/\mu)R adp. \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Atunci } L &= \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{p_1}^{p_2} p \frac{m}{\mu} R adp = [mRa / (2\mu)](p_2^2 - p_1^2) = \\
 &= [mR / (2\mu)](ap_2^2 - ap_1^2) = [mR / (2\mu)](T_2 - T_1),
 \end{aligned}$$

$$\text{deci } dL = (1/2)\nu R dT, \quad dQ = dU + dL = \nu C_V dT + (1/2)\nu R dT, \quad (4)$$

$$\text{de unde prin definiție } C = dQ / (\nu dT) = C_V + R/2. \quad (5)$$

Dealtfel transformarea dată este o *politropă*: $Tp^{-2} = \text{const}$ sau

$$pV \cdot p^{-2} = \text{const} \text{ sau } pV^{-1} = \text{const}, \quad k = -1 \quad (6)$$

și conform problemei 2.2.47:

$$C = C_v + R/(1 - k) = C_v + R/2 = 3R. \quad (7)$$

Problema se poate rezolva elementar observând că procesul (1) se reprezintă în diagrama $p - V$ printr-o *dreaptă* care trece prin origine, deci lucrul mecanic se calculează ușor ca *aria* trapezului de sub grafic. Mai departe se poate judeca cu variații mici, ΔT , etc.

(* *)2.2.46. O cantitate ν moli de gaz perfect cu căldura molară izocoră C_v suferă o transformare în care $V \sim \sqrt{T}$. Gazul este încălzit lent de la T_1 la T_2 . Ce lucru mecanic efectuează gazul și care este căldura sa molară în această transformare ?

Reprezentați procesul în diagramele $p - V$, $V - T$, $p - T$.

Rezolvare. Fie ecuația procesului : $T = aV^2$, $a = \text{const}$. (1)

Atunci $pV = \nu RT = \nu R \cdot aV^2$, $p = \nu R aV$. (2)

$$L = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \nu R a V dV = (\nu R a / 2)(V_2^2 - V_1^2) =$$

$$= (\nu R / 2)(aV_2^2 - aV_1^2) = (\nu R / 2)(T_2 - T_1) = (\nu R / 2) \Delta T. \quad (3)$$

$$Q = \Delta U + L = \nu C_v \Delta T + (\nu R / 2) \Delta T = \nu(C_v + R/2) \Delta T, \quad (4)$$

de unde prin definiție : $C = Q / (\nu \Delta T) = C_v + R/2$. (5)

Dealtfel, transformarea dată este o **politropă** :

$$TV^{-2} = a = \text{const}, \quad -2 = k - 1, \quad k = -1 \quad (6)$$

și conform problemei 2.2.47 :

$$C = C_v + R/(1 - k) = C_v + R/2. \quad (6)$$

Graficele sunt aceleași ca la problema 2.2.45.

Și această problemă se poate rezolva elementar, fără derivate și integrale, observând că procesul (6) se reprezintă în diagrama $p - V$ printr-o *dreaptă* trecând prin origine, deci lucrul mecanic se calculează ușor ca *aria* trapezului de sub grafic.

**** 2.2.47. Un gaz perfect suferă transformarea politropică $pV^k = \text{const}$. Calculați : a) lucrul mecanic efectuat de gaz, b) căldura absorbită și căldura molară politropică. c) Reciproc, arătați că singurele transformări cu căldura molară constantă sunt politropele.**

Rezolvare. a) $L = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\text{const}}{V^k} dV =$

$$= [\text{const} / (1 - k)] (V_2^{1-k} - V_1^{1-k}), \quad (k \neq 1),$$

dar $p_1 V_1^k = p_2 V_2^k = \text{const}$, atunci

$$L = (p_2 V_2 - p_1 V_1) / (1 - k) = \nu R (T_2 - T_1) / (1 - k), \quad (k \neq 1). \quad (1)$$

Pentru $k = 1$ se obține cazul *izotermei* :

$$L = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{V} dV = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } Q &= \Delta U + L = \nu C_V \Delta T + \nu R \Delta T / (1 - k) = \\ &= \nu [C_V + R / (1 - k)] \Delta T = \nu C_k \Delta T, \end{aligned} \quad (3)$$

de unde căldura molară pe **politropă** : $C_k = C_V + R / (1 - k)$ (4)

(pentru *izotermă* $C \rightarrow \infty$; pentru *izocoră* $k \rightarrow \infty$).

$$\text{c) } Q = \nu C dT = \nu C_V dT + p dV, \quad \nu (C - C_V) dT = p dV = (\nu RT / V) dV,$$

separăm variabilele și integrăm: $(C - C_V) dT / T = R dV / V,$

$$\int (C - C_V) \frac{dT}{T} = \int R \frac{dV}{V}, \quad (C - C_V) \ln T = R \ln V + \ln K,$$

unde am scris constanta de integrare sub forma $\ln K$. Rezultă

$$\begin{aligned} \ln T^{C-C_V} = \ln V^2 + \ln K = \ln (KV^2) \quad \text{sau} \quad T^{C-C_V} = KV^2, \\ \dot{T} \cdot V^{R(C_V-C)} = K' = \text{const}, \end{aligned} \quad (5)$$

dar ecuația politropei $pV^k = \text{const}$ se poate scrie și $TV^{k-1} = \text{const}$,
deci $R / (C_V - C) = k - 1$, de unde

$$C = C_V + R / (1 - k). \quad (6)$$

Căldura molară politropică se mai poate scrie astfel :

$$C_k = C_V + R / (1 - k) = C_V (\gamma - k) / (1 - k). \quad (7)$$

Pentru $k \in (1, \gamma)$, avem $C_k < 0$.

*

2.3. Ciclul Carnot și alte cicluri

2.3.1. O mașină termică funcționează după ciclul Carnot. Gazul cedează sursei reci o fracțiune $f = 0,60$ din căldura absorbită de la sursa caldă, a cărei temperatură este $t_1 = 227^\circ\text{C}$. Aflați randamentul și temperatura sursei reci. Reprezentați ciclul Carnot în diagramele $p - V$, $V - T$, $p - T$.

Rezolvare. Din formula randamentului sau direct din calcul rezultă

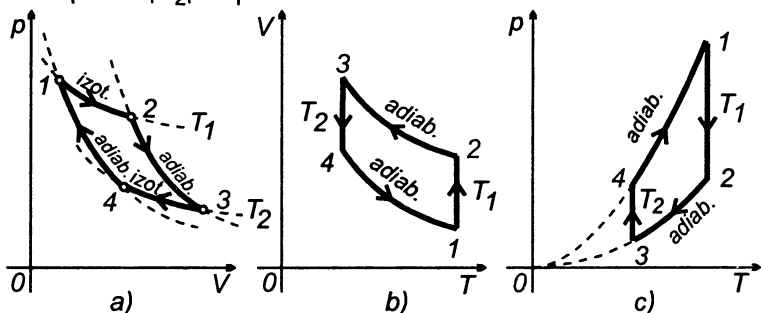
$$\eta = 1 - |Q_2|/Q_1 = 1 - T_2/T_1 \rightarrow Q_1/|Q_2| = T_1/T_2, \quad (1)$$

raportul căldurilor absorbită / cedată într-un ciclu Carnot reversibil este egal cu raportul temperaturilor termodinamice ale termostatelor respective (aceasta stă, de fapt, la baza definirii scării termodinamice a temperaturilor, care coincide - în virtutea teoremelor lui Carnot - cu scara absolută Kelvin bazată pe gazul ideal).

În cazul nostru : $|Q_2| = f Q_1 \rightarrow$

$$f Q_1 / Q_1 = T_2 / T_1 \rightarrow T_2 = f T_1 = 300 \text{ K} = 27^\circ\text{C}, \quad (1)$$

$$\eta = 1 - |Q_2|/Q_1 = 1 - f = 40 \%.$$



CICLUL CARNOT

Fig.2.3.1

Pentru grafice observăm că adiabata în $V - T$ arată asemănător adiabatei în $p - V$, iar în $p - T$ arată ca o parabolă cu minim în origine. Observăm, de asemenea, că sensul de parcurs ciclul este la fel în $p - V$ și $p - T$, dar inversat în $V - T$.

2.3.2. Într-un ciclu Carnot de randament $\eta = 20\%$ lucrul mecanic efectuat de gaz ideal la destinderea izotermă este $L_{\text{izot}} = 100$ J. Care este lucrul mecanic consumat la comprimarea izotermă? Reprezentați ciclul Carnot în diagramele $p - V$, $V - T$, $p - T$.

Rezolvare. Pe izoterma gazului ideal $\Delta U = 0$ (legea lui Joule : energia internă a gazului ideal depinde numai de temperatură), atunci

$$L_{\text{izot}} = Q_1, \quad W_{\text{izot}} = |Q_2|, \quad \eta = 1 - |Q_2|/Q_1 = 1 - W_{\text{izot}}/L_{\text{izot}}, \quad (1)$$

$$W_{\text{izot}} = (1 - \eta) L_{\text{izot}} = 80 \text{ J}. \quad (2)$$

Graficele sunt date la problema precedentă 2.3.2.

2.3.3. Calculați randamentul ciclului Carnot în funcție de raportul de compresie $\varepsilon = V_4/V_1 = 2,0$ și exponentul adiabatic $\gamma = 1,40$ (gaze diatomice). Cunoscând $V_2 = 3,00$ L, aflați V_3 . Reprezentați ciclul în diagramele $p - V$, $V - T$, $p - T$.

Rezolvare. Graficele sunt date la problema 2.3.2.

Aplicăm ecuația adiabatei $TV^{\gamma-1} = \text{const}$:

$$T_2/T_1 = (V_1/V_4)^{\gamma-1} = T_2/T_1 = (V_2/V_3)^{\gamma-1} = 1/\varepsilon^{\gamma-1}, \quad (1)$$

$$\eta = 1 - T_2/T_1 = 1 - 1/\varepsilon^{\gamma-1} = 24\%. \quad (2)$$

$$V_1/V_4 = V_2/V_3 \rightarrow V_3 = V_2 V_4/V_1 = V_2 \varepsilon = 6,00 \text{ L}. \quad (3)$$

2.3.4. Calculați randamentul ciclului Carnot cunoscând temperatura sursei calde $t_1 = 127^\circ\text{C}$ și lucrul mecanic la destinderea adiabatică pentru un mol de gaz diatomic : $L^*_{\text{ad}} = 2,49$ kJ/mol. Reprezentați ciclul Carnot în diagramele $p - V$, $V - T$, $p - T$.

Rezolvare. Graficele sunt date la problema 2.3.2.

$$L^*_{\text{ad}} = -C_v(T_2 - T_1) \rightarrow T_1 - T_2 = L^*_{\text{ad}}/C_v, \quad (1)$$

$$\eta = (T_1 - T_2)/T_1 = L^*_{\text{ad}}/(C_v T_1) = 2 L^*_{\text{ad}}/(5RT_1) = 30\%. \quad (2)$$

2.3.5. O pompă de căldură, funcționând după un ciclu Carnot (inversat) între temperaturile $t_2 = -13^\circ\text{C}$ (afară) și $t_1 = 27^\circ\text{C}$ (în cameră) consumă pe ciclu energie electrică $W = 2,00$ kJ. Calculați pe ciclu : a) Căldura absorbită de afară, b) Căldura cedată în cameră, c) eficiența pompei de căldură, d) eficiența mașinii considerată ca mașină frigorifică.

Rezolvare. a) Conform teoremei de la problema 2.3.2 :

$$Q_{\text{abs}}/Q_{\text{ced}} = T_2/T_1, \quad Q_{\text{ced}} = Q_{\text{abs}} + W, \quad (1)$$

unde W este lucrul mecanic primit de mașină.

$$Q_{\text{abs}} = W \cdot T_2/(T_1 - T_2) = 13 \text{ kJ}. \quad (2)$$

$$b) Q_{ced} = Q_{abs} + W = 15 \text{ kJ} . \quad (3)$$

$$c) \varepsilon = Q_{ced} / W = 7,5 ; \quad d) \varphi = Q_{abs} / W = 6,5 , \quad (4)$$

adică per fiecare joule consumat de la rețeaua electrică, mașina absoarbe de afară (sau evacuează din interiorul frigiderului) 6,5 J și degajă în cameră 6,5 J + 1 J = 7,5 J .

2.3.6. Ce câștig de căldură se obține pentru încălzirea unei hale, dacă în loc să ardem direct cărbunele în sobe, el este folosit într-o mașină termică Carnot funcționând între temperaturile $t_2 = 27^\circ\text{C}$ și $t_1 = 227^\circ\text{C}$, iar lucrul mecanic astfel obținut este folosit într-o pompă de căldură Carnot, care ia căldură de afară la temperatura $t_4 = -13^\circ\text{C}$ și o cedează în hală la temperatura $t_3 = 27^\circ\text{C}$?

$$\text{Rezolvare. } L = \eta_1 Q_1 = Q_1 (T_1 - T_2) / T_1 ,$$

$$W = \eta_2 Q_3' = Q_3' (T_3 - T_4) / T_3 , \quad (1)$$

$$\text{dar } L = W, Q_3' = L T_3 / (T_3 - T_4) = Q_1 [(T_1 - T_2) / T_1] T_3 / (T_3 - T_4) . (2)$$

$$Q_3' / Q_1 = \eta_1 / \eta_2 = [(T_1 - T_2) / T_1] \cdot T_3 / (T_3 - T_4) = 3,0 , \quad (3)$$

deci prin acest sistem, cu aceeași cantitate de cărbuni, obținem o căldură de 3 ori mai mare decât puterea lor calorifică, pe seama căldurii luate de fără (de la sursa rece) .

2.3.7. O mașină frigorifică Carnot ia căldură de la apă la $t_2 = 0^\circ\text{C}$ și o cedează unui fierbător cu apă la $t_1 = 100^\circ\text{C}$. Ce masă m_g de apă trebuie înghețată la sursa rece pentru a vaporiza $m_v = 1,00 \text{ kg}$ apă în fierbător ? De câte ori lucrul mecanic consumat de această mașină este mai mic decât energia necesară direct pentru vaporizarea apei m_v ?

Rezolvare. Conform teoremei de la problema 2.3.2 :

$$Q_1 / |Q_2| = m_v \lambda_v / (m_g \lambda_g) = T_1 / T_2 ,$$

$$m_g = m_v \cdot \lambda_v T_2 / (\lambda_g T_1) = 4,94 \text{ kg} . \quad (1)$$

Lucrul mecanic consumat de mașina frigorifică Carnot :

$W = m_g \lambda_g$. Energia necesară direct pentru vaporizarea apei m_v este $m_v \lambda_v$, deci raportul cerut este

$$\begin{aligned} m_v \lambda_v / W &= m_v \lambda_v / (m_v \lambda_v - m_g \lambda_g) = 1 : [1 - m_g \lambda_g / (m_v \lambda_v)] = \\ &= 1 : (1 - T_2 / T_1) = T_1 / (T_1 - T_2) = 3,73 . \end{aligned} \quad (2)$$

Pentru vaporizarea directă a $m_v = 1,0 \text{ kg}$ apă trebuie o energie $m_v \lambda_v = 2,26 \text{ MJ}$, iar prin intermediul mașinii Carnot trebuie $W = m_v \lambda_v - m_g \lambda_g = 0,60 \text{ MJ}$, de 3,73 ori mai puțin .

2.3.8. Se dă ciclul din figură, în care raportul de compresie $\varepsilon = V_2/V_1 = 2,72$ și $\gamma = 1,40$ (gaz diatomic). Aflați randamentul ciclului. Transcrieți ciclul în coordonatele $V-T$, $p-T$.

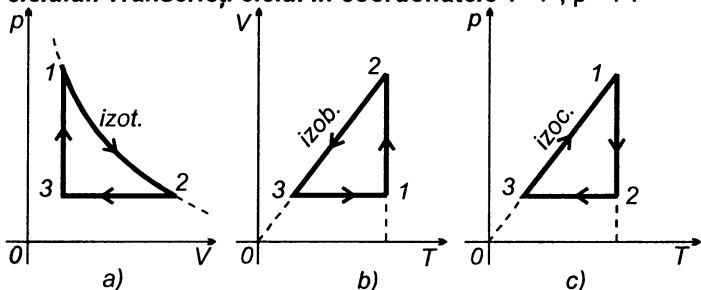


Fig.2.3.8

Rezolvare. Căldura se absoarbe pe porțiunile 3 - 1, 1 - 2 și este cedată pe porțiunea 2 - 3: $\eta = 1 - |Q_2|/Q_1 =$

$$= 1 - \nu C_p(T_1 - T_3) : [\nu C_v(T_1 - T_3) + \nu RT_1 \ln(V_2/V_1)] =$$

$$= 1 - (C_p/C_v)(1 - T_3/T_1) : [1 - T_3/T_1 + (R/C_v) \ln(V_2/V_1)] . \quad (1)$$

Dar $T_3/T_1 = V_1/V_2 = 1/\varepsilon$; $R/C_v = \gamma - 1$, (2)

$$\eta = 1 - \gamma(1 - 1/\varepsilon) : [1 - 1/\varepsilon + (\gamma - 1) \ln(V_2/V_1)] = 14,2 \% . \quad (3)$$

2.3.9. Calculați randamentul ciclului din figură, cunoscând raportul de compresie $\varepsilon = V_3/V_1 = 4,0$ și $\gamma = 1,40$. Comparați cu randamentul ciclului Carnot funcționând între temperaturile extreme. Trasați graficul și în diagramele $V-T$, $p-T$.

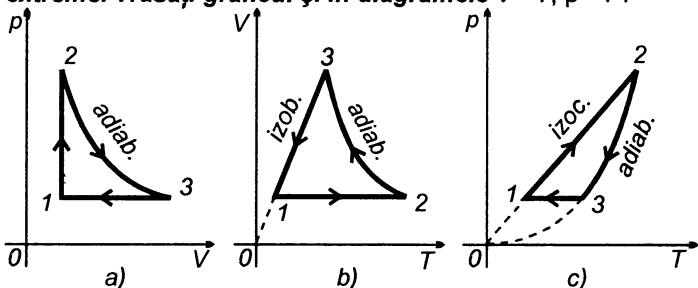


Fig.2.3.9

Rezolvare. Amintim că graficul adiabatei în $V-T$ este asemănător celui din $p-V$, iar în $p-T$ seamănă cu o parabolă cu *minim* în origine. Sensul de parcurgere a ciclului în $V-T$ se inversează față de cel din $p-V$ și $p-T$.

Căldura se absoarbe pe *izocora* 1 - 2 și se cedează pe *izobara* 3 - 1.

$$\eta = 1 - |Q_2| / Q_1 =$$

$$= 1 - \nu C_p (T_3 - T_1) : [\nu C_v (T_2 - T_1)] = 1 - \gamma (T_3 / T_1 - 1) : (T_2 / T_1 - 1). \quad (1)$$

Pe de altă parte , $T_3 / T_1 = V_3 / V_1 = \varepsilon$,

$$T_2 / T_1 = p_2 / p_1 = p_2 / p_3 = (V_3 / V_2)^\gamma = \varepsilon^\gamma , \quad (2)$$

$$\eta = 1 - \gamma (\varepsilon - 1) : (\varepsilon^\gamma - 1) = 30 \% , \quad (3)$$

$$\eta_C = 1 - T_1 / T_2 = 1 - 1 / \varepsilon^\gamma = 85 \% . \quad (4)$$

2.3.10. Calculați randamentul ciclului din figură, cunoscând raportul de compresie $\varepsilon = V_3 / V_1 = 3,0$, $\gamma = 1,40$. Comparați cu randamentul ciclului Carnot funcționând între temperaturile extreme $T_{1,2}$. Transcrieți ciclul și în diagramele $p - V$, $p - T$.

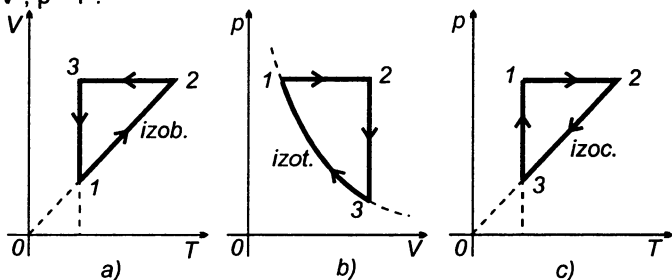


Fig.2.3.10

Rezolvare. Căldura este primită pe destinderea izobară 1 - 2 :

$$Q_1 = \nu C_p (T_2 - T_1) , \quad (1)$$

$$|Q_2| = \nu C_v (T_2 - T_3) + \nu R T_1 \ln(V_3 / V_1) . \quad (2)$$

Dar $\varepsilon = V_3 / V_1 = V_2 / V_1 = T_2 / T_1$, $(T_3 = T_1)$, (3)

$$\eta = 1 - |Q_2| / Q_1 =$$

$$= 1 - [\nu C_v T_1 (T_2 / T_1 - 1) + \nu R T_1 \ln(V_3 / V_1)] : [\nu C_p T_1 (T_2 / T_1 - 1)] =$$

$$= 1 - [\varepsilon - 1 + (\gamma - 1) \ln \varepsilon] : [\gamma (\varepsilon - 1)] = 13 \% , \quad (4)$$

unde $R / C_v = \gamma - 1$, $R = C_p - C_v$, $\gamma = C_p / C_v$; (5)

$$\eta_C = 1 - T_1 / T_2 = 1 - 1 / \varepsilon = 67 \% . \quad (6)$$

2.3.11. Un gaz ideal diatomic, având presiunea inițială $p_1 = 200$ kPa , este încălzit izocor, apoi destins adiabetic până la temperatura inițială, astfel încât $p_3 = 100$ kPa și $V_3 = 2,00$ L , de unde revine izoterm în starea inițială. Reprezentați ciclul în diagramele $p - V$, $V - T$, $p - T$. Calculați: a) volumul și presiunea

în starea 2 , b) lucrul mecanic efectuat în destinderea adiabatică, c) variația energiei interne în destinderea adiabatică, d) randamentul ciclului în funcție de raportul de compresie $\varepsilon = V_3/V_1$ și $\gamma = C_p/C_v$, e) randamentul ciclului Carnot funcționând între temperaturile extreme.

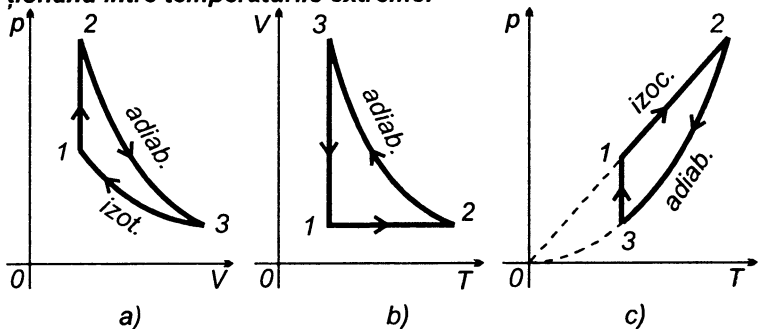


Fig.2.3.11

Rezolvare. a) $V_2 = V_1 = V_3 \cdot p_3/p_1 = 1,00 \text{ L}$, (1)

$$p_2/p_1 = T_2/T_1 = T_2/T_3 = (V_3/V_2)^{\gamma-1} = (V_3/V_1)^{\gamma-1} = \varepsilon^{\gamma-1} = (p_1/p_3)^{\gamma-1} , p_2 = p_1 (p_1/p_3)^{\gamma-1} = 260 \text{ kPa} .$$
 (2)

b) $L_{ad} = -\Delta U = -\nu C_v(T_3 - T_2) = (C_v/R)(\nu RT_2 - \nu RT_3) = [C_v/(C_p - C_v)](p_2 V_2 - p_3 V_3) = (p_2 V_2 - p_3 V_3)/(\gamma - 1) = 800 \text{ J} .$ (3)

c) $\Delta U = -L$. d) $\eta = 1 - |Q_2|/Q_1 = 1 - [\nu RT_1 \ln(V_3/V_1)] : [\nu C_v(T_2 - T_1)] = 1 - [(C_p - C_v) \ln \varepsilon] : [C_v(T_2/T_1 - 1)] = 1 - [(\gamma - 1) \ln \varepsilon] : (\varepsilon^{\gamma-1} - 1) = 18 \%$. (4)

e) $\eta_C = 1 - T_1/T_2 = 1 - 1/\varepsilon^{\gamma-1} = 24 \%$. (5)

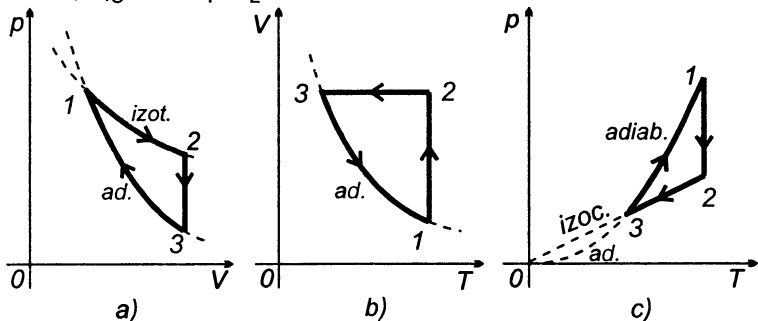


Fig.2.3.12

2.3.12. Reprezentați ciclul din figură în diagramele V - T, p - T. Calculați randamentul ciclului în funcție de raportul de compresie $\varepsilon = V_3/V_1 = 4,0$, $\gamma = 1,40$. Comparați cu randamentul ciclului Carnot funcționând între temperaturile extreme.

Rezolvare. $Q_1 = vRT_1 \ln(V_2/V_1) = vRT_1 \ln \varepsilon$, (1)

$|Q_2| = vC_v(T_2 - T_3) = vC_v T_1(1 - T_3/T_1)$, (2)

dar $T_3/T_1 = (V_1/V_3)^{\gamma-1} = 1/\varepsilon^{\gamma-1}$, (3)

$\eta = 1 - |Q_2|/Q_1 = 1 - [vC_v T_1(1 - 1/\varepsilon^{\gamma-1})] : (vRT_1 \ln \varepsilon) =$
 $= 1 - (1 - 1/\varepsilon^{\gamma-1}) : [(\gamma - 1) \ln \varepsilon] = 23 \%$, (4)

unde $R = C_p - C_v$, $\gamma = C_p/C_v$; (5)

$\eta_C = 1 - T_3/T_1 = 1 - 1/\varepsilon^{\gamma-1} = 42,5 \%$. (6)

2.3.13. Transcrieți ciclul din figură și în diagramele V - T, p - T. Calculați randamentul ciclului în funcție de: a) raportul de compresie $\varepsilon = V_3/V_1 = 4,0$, $\gamma = 1,40$, b) raportul temperaturilor $\tau = T_2/T_1 = e (\approx 2,71)$. c) Comparați cu randamentul ciclului Carnot funcționând între temperaturile $T_{1,2}$ din cazul precedent.

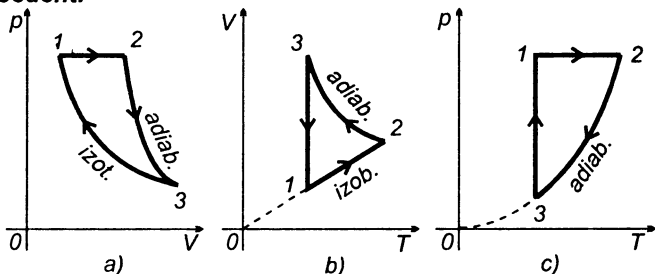


Fig.2.3.13

Rezolvare. a) $Q_1 = vC_p(T_2 - T_1)$, $|Q_2| = vRT_1 \ln(V_3/V_1)$, (1)

$T_2/T_1 = T_2/T_3 = (p_3/p_2)^{(1-\gamma)/\gamma} = (V_1/V_3)^{(1-\gamma)/\gamma} = \varepsilon^{(\gamma-1)/\gamma}$, (2)

unde am folosit ecuația adiabatei :

$pV^\gamma = \text{const} \rightarrow TV^{\gamma-1} = \text{const} \rightarrow p^{1-\gamma} T^\gamma = \text{const}$

sau $T p^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{const}$; (3)

$\eta = 1 - |Q_2|/Q_1 = 1 - [vRT_1 \ln \varepsilon] : [vC_p T_1(T_2/T_1 - 1)] =$
 $= 1 - [R \ln \varepsilon] : \{C_p[\varepsilon^{(\gamma-1)/\gamma} - 1]\}$, (4)

dar $R = C_p - C_v$, $\gamma = C_p/C_v \rightarrow R/C_p = 1 - 1/\gamma = (\gamma - 1)/\gamma$, (5)

$$\eta = 1 - [(\gamma - 1) \ln \varepsilon] : \{\gamma[\varepsilon^{(\gamma-1)/\gamma} - 1]\} = 18,5 \% , \quad (6)$$

$$\eta_C = 1 - T_1/T_2 = 1 - 1/\varepsilon^{(\gamma-1)/\gamma} = 33 \% . \quad (7)$$

$$b) \varepsilon = V_3/V_1 = (V_3/V_2) \cdot V_2/V_1 = (T_2/T_1)^{1/(\gamma-1)} \cdot T_2/T_1 = \\ = (T_2/T_1)^{\gamma/(\gamma-1)} = \tau^{\gamma/(\gamma-1)} , \quad (8)$$

$$\eta = 1 - [(\gamma - 1) \ln \tau^{\gamma/(\gamma-1)}] : [\gamma(\tau - 1)] = 1 - (\ln \tau) / (\tau - 1) = 42 \% ; (9)$$

$$\eta_C = 1 - T_1/T_2 = 1 - 1/\tau = 67 \% . \quad (10)$$

2.3.14. Un gaz ideal diatomic parcurge ciclul din figură, în care: $t_1 = 27^\circ\text{C}$, $t_2 = 227^\circ\text{C}$, $p_4 = 100 \text{ kPa}$, $p_1 = 271,8 \text{ kPa}$. **Transcrieți ciclul în diagramele $V - T$, $p - T$. Calculați pe ciclu și pentru $\nu = 1,00 \text{ mol}$ de gaz :** a) Căldura absorbită Q_1 , b) Căldura cedată $|Q_2|$, c) Lucrul mecanic L , d) randamentul ciclu-lui η , e) randamentul ciclu-lui Carnot funcționând între aceleași temperaturi. f) Exprimați randamentul ciclu-lui în funcție de rapoartele de compresie : $\varepsilon = V_4/V_1 = p_1/p_4$, $\rho = V_2/V_1 = T_2/T_1 = \tau$. **Comparați cu randamentul ciclu-lui Carnot.**

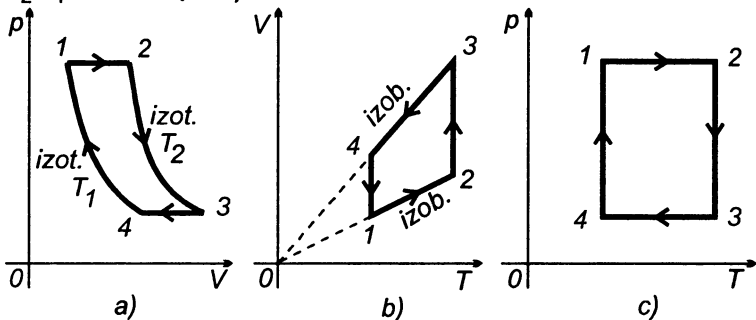


Fig.2.3.14

Rezolvare. a) $Q_1 = \nu(7R/2)(T_2 - T_1) + \nu RT_2 \ln(p_1/p_4) = 10,0 \text{ kJ} . \quad (1)$

b) $|Q_2| = \nu(7R/2)(T_2 - T_1) + \nu RT_1 \ln(p_1/p_4) = 8,3 \text{ kJ} . \quad (2)$

c) $L = Q_1 - |Q_2| = \nu R(T_2 - T_1) \ln(p_1/p_4) = 1,70 \text{ J} . \quad (3)$

d) $\eta = L/Q_1 = 17 \% . \quad (4)$

e) $\eta_C = 1 - T_1/T_2 = 40 \% . \quad (5)$

f) $\varepsilon = V_4/V_1 = V_3/V_2 = p_1/p_4 , \quad (6)$

$$\eta = [\nu R(T_2 - T_1) \ln(p_1/p_4)] : [\nu C_p(T_2 - T_1) + \nu RT_2 \ln(p_1/p_4)] = \\ = (T_2 - T_1) : \{ [\gamma / (\gamma - 1)] (T_2 - T_1) / \ln \varepsilon + T_2 \} < \eta_C = (T_2 - T_1) / T_2 , (7)$$

$$\eta = [T_1(T_2/T_1 - 1) \ln(p_1/p_4)] : [(C_p/R)T_1(T_2/T_1 - 1) + (T_2/T_1) \ln(p_1/p_4)] =$$

$$= [(\tau - 1) \ln \varepsilon] : \{ [\gamma/(\gamma - 1)](\tau - 1) + \tau \ln \varepsilon \}, \quad \eta_C = 1 - 1/\tau. \quad (8)$$

2.3.15. Transcrieți ciclul din figură în diagramele V-T, p-T. Exprimați randamentul ciclului în funcție de raportul de compresie $\varepsilon = V_4/V_1 = 5,0$ și raportul temperaturilor $\tau = T_2/T_1 = 2,0$, $\gamma = 1,40$. Comparați cu randamentul ciclului Carnot.

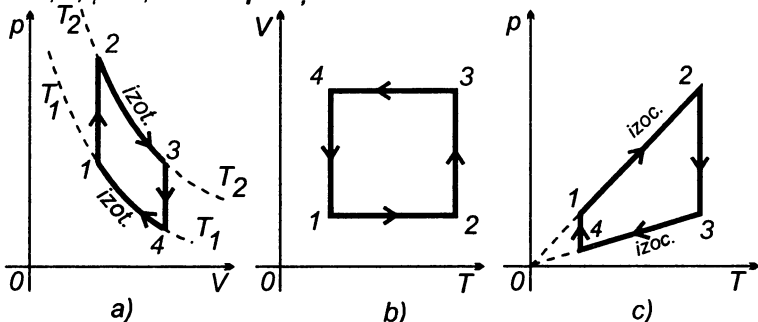


Fig.2.3.15

Rezolvare. $Q_1 = \nu C_V(T_2 - T_1) + \nu RT_2 \ln(V_4/V_1), \quad (1)$

$$|Q_2| = \nu C_V(T_2 - T_1) + \nu RT_1 \ln(V_4/V_1), \quad (2)$$

$$\eta = (Q_1 - |Q_2|) / Q_1 = [R(T_2 - T_1) \ln \varepsilon] : [C_V(T_2 - T_1) + RT_2 \ln \varepsilon] =$$

$$= (T_2 - T_1) : \{ (T_2 - T_1) / [(\gamma - 1) \ln \varepsilon] + T_2 \} < \eta_C = (T_2 - T_1) : T_2, \quad (3)$$

$$\eta = [(T_2/T_1 - 1) \ln \varepsilon] : [(T_2/T_1 - 1) / (\gamma - 1) + (T_2/T_1) \ln \varepsilon] =$$

$$= [(\tau - 1) \ln \varepsilon] : [(\tau - 1) / (\gamma - 1) + \tau \ln \varepsilon] = 28 \% ; \quad (4)$$

$$\eta_C = 1 - 1/\tau = 50 \% . \quad (5)$$

2.3.16. Transcrieți ciclul din figură în diagramele V-T, p-T. Cunoscând numărul de moli $\nu = 1,00$ mol, temperaturile $t_1 = 27^\circ\text{C}$, $t_2 = 127^\circ\text{C}$, $t_3 = 427^\circ\text{C}$, calculați: a) lucrul mecanic efectuat de gaz pe ciclu, b) randamentul în funcție de rapoartele de compresie $\varepsilon = V_4/V_1 = 2,0$, $\delta = p_2/p_1 = 3,0$, $\gamma = 1,40$. Comparați cu randamentul ciclului Carnot funcționând între temperaturile extreme.

Rezolvare. a) $T_2/T_1 = p_2/p_1 = p_3/p_4 = T_3/T_4 \rightarrow$

$$T_4 = T_1 \cdot T_3 / T_2, \quad (1)$$

Lucrul mecanic este egal cu *aria* ciclului în diagrama p - V :

$$L = (p_2 - p_1)(V_4 - V_1) = p_2 V_4 - p_2 V_1 - p_1 V_4 + p_1 V_1 =$$

$$= \nu R(T_3 - T_2 - T_4 + T_1) = \nu R(T_3 - T_2 - T_1 T_3 / T_2 + T_1) =$$

$$= \nu R (T_2 - T_1) (T_3 - T_2) / T_2 = 627 \text{ J} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{sau altfel, } L &= (\nu R T_2 / V_2 - \nu R T_1 / V_1) (\nu R T_4 / p_4 - \nu R T_1 / p_1) = \\ &= \nu R (T_2 - T_1) \nu R (T_4 - T_1) : (p_1 V_1) = \\ &= \nu R (T_2 - T_1) (T_1 T_3 / T_2 - T_1) : T_1. \end{aligned} \quad (3)$$

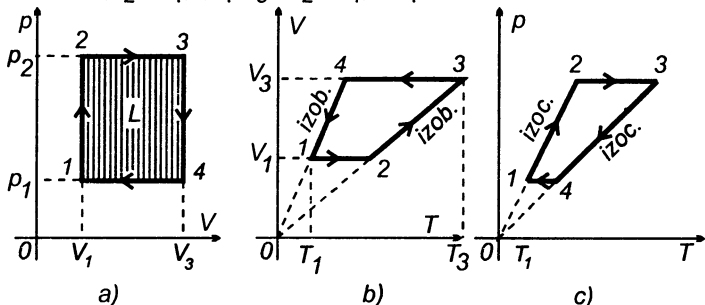


Fig.2.3.16

$$b) Q_1 = \nu C_V (T_2 - T_1) + \nu C_p (T_3 - T_2), \quad (4)$$

$$|Q_2| = \nu C_V (T_3 - T_4) + \nu C_p (T_4 - T_1), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - |Q_2| / Q_1 = 1 - [C_V T_1 (T_3 / T_1 - T_4 / T_1) + C_p T_1 (T_4 / T_1 - 1)] : \\ &: [C_V T_1 (T_2 / T_1 - 1) + C_p T_1 (T_3 / T_1 - T_2 / T_1)], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{dar } T_4 / T_1 = V_4 / V_1 = \varepsilon, \quad T_3 / T_4 = T_2 / T_1 = p_2 / p_1 = \delta, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - [\varepsilon \delta - \varepsilon + \gamma (\varepsilon - 1)] : [\delta - 1 + \gamma (\varepsilon \delta - \delta)] = \\ &= 1 - [\varepsilon (\delta - 1) + \gamma (\varepsilon - 1)] : [\delta - 1 + \gamma \delta (\varepsilon - 1)] = \\ &= [(\gamma - 1) (\varepsilon - 1) (\delta - 1)] : [\delta - 1 + \gamma \delta (\varepsilon - 1)] = 13 \% ; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\eta_C = 1 - T_1 / T_3 = 1 - 1 / (\varepsilon \delta) = 83 \% . \quad (9)$$

2.3.17. Transcrieți ciclul Otto al motorului cu explozie în diagramele V - T , p - T. Calculați randamentul în funcție de raportul de compresie $\varepsilon = V_4 / V_1 = 6,0$, $\gamma = 1,40$. Comparați cu randamentul ciclului Carnot funcționând între temperaturile extreme.

$$\text{Rezolvare. } Q_1 = \nu C_V (T_2 - T_1), \quad |Q_2| = \nu C_V (T_3 - T_4). \quad (1)$$

Din ecuația adiabatei $TV^{\gamma-1} = \text{const}$ avem :

$$T_2 / T_3 = (V_3 / V_2)^{\gamma-1} = (V_4 / V_1)^{\gamma-1} = T_1 / T_4 = \varepsilon^{\gamma-1}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - |Q_2| / Q_1 = 1 - (T_3 - T_4) / (T_2 - T_1) = \\ &= 1 - [T_3 (1 - T_4 / T_3)] : [T_2 (1 - T_1 / T_2)] = 1 - T_3 / T_2 < \\ &< \eta_C = 1 - T_4 / T_2, \quad (T_4 < T_3); \end{aligned} \quad (3)$$

$$\eta = 1 - T_3 / T_2 = 1 - 1 / \varepsilon^{\gamma-1} = 51 \% . \quad (4)$$

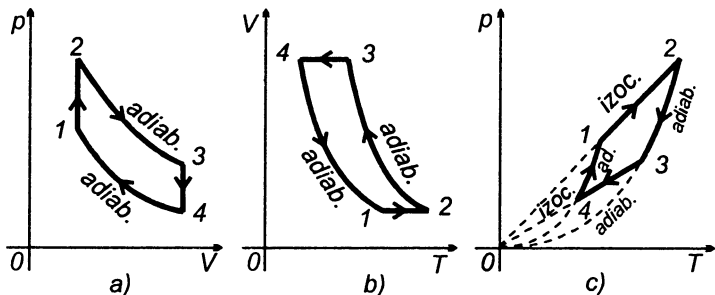


Fig.2.3.17

2.3.18. Reprezentați ciclul motorului cu reacție, dat în figură, și în diagramele V-T, p-T. Exprimați randamentul în funcție de raportul de compresie $\varepsilon = V_4/V_1 = 4,0$, $\gamma = 1,40$. Comparați cu randamentul ciclului Carnot funcționând între temperaturile extreme $T_{4,2}$.

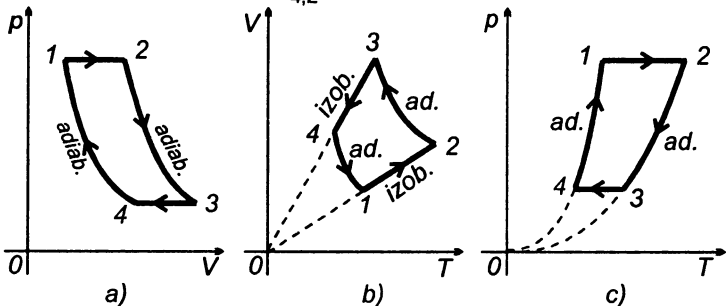


Fig.2.3.18

Rezolvare. $Q_1 = \nu C_p(T_2 - T_1)$, $|Q_2| = \nu C_p(T_3 - T_4)$. (1)

Din ecuațiile adiabatei $TV^{\gamma-1} = \text{const}$ și $TP^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{const}$ avem:

$$T_1/T_4 = (V_4/V_1)^{\gamma-1} = \varepsilon^{\gamma-1} = (p_4/p_1)^{(1-\gamma)/\gamma} = (p_3/p_2)^{(1-\gamma)/\gamma} = T_2/T_3, (2)$$

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - |Q_2|/Q_1 = 1 - (T_3 - T_4)/(T_2 - T_1) = \\ &= 1 - [T_3(1 - T_4/T_3)] : [T_2(1 - T_1/T_2)] = 1 - T_3/T_2 < \\ &< \eta_C = 1 - T_4/T_2, \quad (T_4 < T_3); \end{aligned} (3)$$

$$\eta = 1 - T_3/T_2 = 1 - 1/\varepsilon^{\gamma-1} = 42,6\%. (4)$$

2.3.19. Transcrieți ciclul Diesel și în diagramele V-T, p-T. Calculați randamentul în funcție de rapoartele de compresie: $\varepsilon = V_4/V_1 = 10,0$, $\rho = V_2/V_1 = 2,0$, $\gamma = 1,40$. Comparați cu randamentul ciclului Carnot funcționând între temperaturile $T_{4,1}$ și $T_{4,2}$.

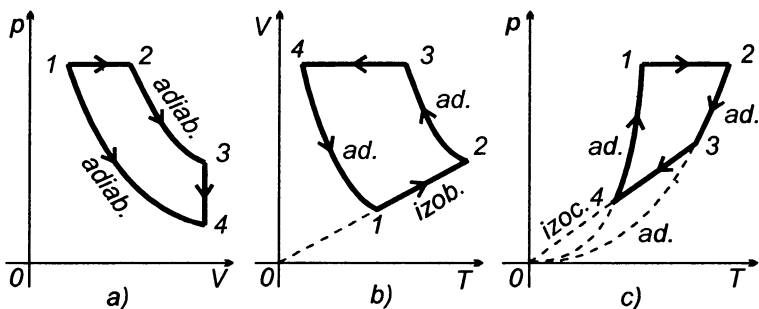


Fig.2.3.19

Rezolvare. $Q_1 = \nu C_p(T_2 - T_1)$, $|Q_2| = \nu C_v(T_3 - T_4)$, (1)

dar din ecuația adiabatei $TV^{\gamma-1} = \text{const}$ rezultă :

$$T_1/T_4 = (V_4/V_1)^{\gamma-1} = \varepsilon^{\gamma-1}; T_2/T_3 = (V_3/V_2)^{\gamma-1} =$$

$$= [(V_4/V_1) \cdot (V_1/V_2)]^{\gamma-1} = (\varepsilon/\rho)^{\gamma-1} \rightarrow (T_1/T_4) \cdot (T_3/T_2) = \rho^{\gamma-1}, (2)$$

$$T_2/T_1 = V_2/V_1 = \rho, T_3/T_4 = \rho^\gamma, T_2/T_4 = (T_2/T_1) \cdot T_1/T_4 = \rho \varepsilon^{\gamma-1}; (3)$$

$$\eta = 1 - |Q_2|/Q_1 = 1 - C_v(T_3 - T_4) : [C_p(T_2 - T_1)] =$$

$$= 1 - T_4(T_3/T_4 - 1) : [\gamma T_1(T_2/T_1 - 1)] =$$

$$= 1 - (\rho^\gamma - 1) : [\gamma \varepsilon^{\gamma-1}(\rho - 1)] = 53 \% . (4)$$

$$\eta_{C1} = 1 - T_4/T_1 = 1 - 1/\varepsilon^{\gamma-1} = 60 \% , (5)$$

$$\eta_{C2} = 1 - T_4/T_2 = 1 - 1/(\rho \varepsilon^{\gamma-1}) = 80 \% . (6)$$

2.3.20. Două mașini termice lucrează cu gaz ideal după ciclurile 12341, respectiv 12561, din figură. Reprezentați ciclurile și în diagramele V - T, p - T. Aflați raportul randamentelor celor două mașini în funcție de exponentul adiabatic γ .

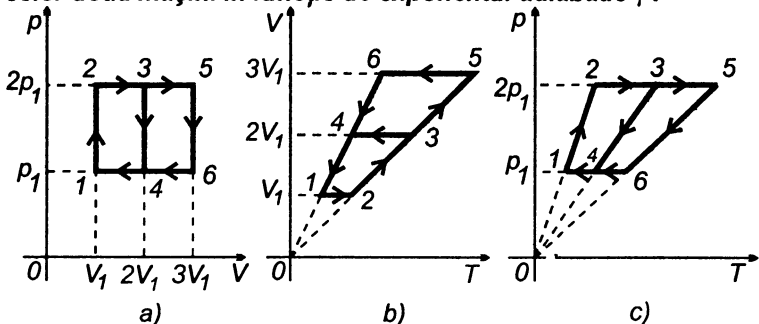


Fig.2.3.20

Rezolvare. Lucrul mecanic efectuat într-un ciclu este egal cu aria ciclului în diagrama $p - V$, deci

$$\begin{aligned} L_1 &= (2p_1 - p_1)(2V_1 - V_1) = p_1 V_1, \\ L_2 &= (2p_1 - p_1)(3V_1 - V_1) = 2p_1 V_1, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \eta_1 &= p_1 V_1 : [vC_V(T_2 - T_1) + vC_p(T_3 - T_2)] = \\ &= RT_1 : [C_V T_1(T_2/T_1 - 1) + C_p T_2(T_3/T_2 - 1)] = \\ &= R : [C_V (p_2/p_1 - 1) + C_p (p_2/p_1) (V_3/V_2 - 1)] = \\ &= R : (C_V + C_p \cdot 2) = (C_p - C_V) : (C_V + 2 C_p) = \\ &= (\gamma - 1) : (1 + 2\gamma), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \eta_2 &= 2p_1 V_1 : [vC_V(T_2 - T_1) + vC_p(T_5 - T_2)] = \\ &= 2R : (C_V + C_p \cdot 2 \cdot 2) = 2(\gamma - 1) : (1 + 4\gamma), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\eta_1 / \eta_2 = (1 + 4\gamma) : [2(1 + 2\gamma)] < 1. \quad (5)$$

2.3.21. Aflați raportul randamentelor ciclurilor din figură : 1234 și 5674, parcurse de un gaz ideal monoatomic. Reprezentați ciclurile și în diagramele $V - T$, $p - T$.

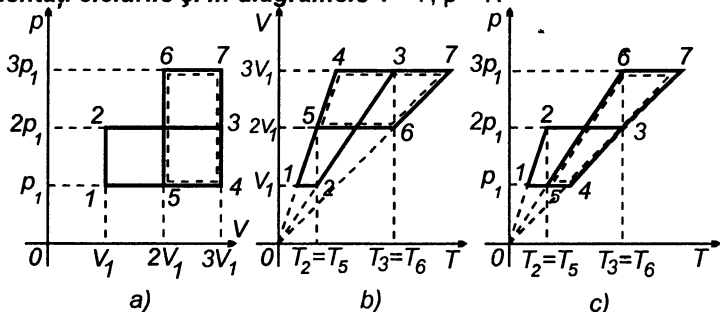


Fig.2.3.21

Rezolvare. Lucrul mecanic efectuat în cele două cicluri:

$$L = (p_2 - p_1)(V_4 - V_1) = 2 p_1 V_1 = 2 vRT_1 = L'. \quad (1)$$

$$p_2 V_2 = 2p_1 V_1 = p_5 V_5 \rightarrow T_2 = T_5 = 2T_1, \quad (2)$$

$$T_4 = 3T_1, \quad T_3 = T_6 = 2 T_4 = 6T_1, \quad T_7 = 9 T_1. \quad (3)$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= vC_V(T_2 - T_1) + vC_p(T_3 - T_2) = vRT_1 \cdot 23/2, \\ \eta &= L / Q_1 = 4 / 23; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} Q_1' &= vC_V(T_6 - T_5) + vC_p(T_7 - T_6) = vRT_1 \cdot 27/2, \\ \eta' &= 4 / 27, \end{aligned} \quad (5)$$

unde pentru gaze *monoatomice* $C_V = 3R/2$, $C_p = 5R/2$.

$$\eta / \eta' = Q_1' / Q_1 = 27 / 23 > 1. \quad (6)$$

2.3.22. O masă $m = 0,200$ kg argon se află într-un cilindru vertical sub un piston blocat, în starea inițială $p_1 = 410$ kPa , $V_1 = 32$ L. a) Aflați căldura specifică C_v , cunoscând R și μ . b) Calculați variația energiei cinetice a tuturor moleculelor gazului, când temperatura crește cu $\Delta T = 273$ K. c) Deblocând pistonul, acesta coboară încet astfel că presiunea gazului variază liniar cu volumul, după legea $p = a - bV$ până la starea finală $p_2 = 1550$ kPa și $V_2 = 9,0$ L. Aflați temperatura maximă atinsă de gaz în acest proces.

Rezolvare. a) La gazele monoatomice cum este argonul căldura molară izocoră este

$$C_v = 3R/2 = \mu c_v, \quad c_v = 3R/(2\mu) = 312 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}. \quad (1)$$

b) Energia internă a unui gaz ideal (perfect) este formată numai din energia cinetică a moleculelor sale (energia potențială de interacție a moleculelor fiind neglijabilă, ceea ce este valabil la temperaturi înalte și presiuni joase) :

$$\Delta U = \nu C_v \Delta T = (m/\mu)(3R/2) \Delta T = 17 \text{ kJ}. \quad (2)$$

c) Preluăm rezultatele de la problema 1.4.10 :

$$a = (V_2 p_1 - V_1 p_2) : (V_2 - V_1), \quad b = -(p_2 - p_1) : (V_2 - V_1). \quad (3)$$

Parametrii de stare în punctul căutat : $V_m = a/(2b)$, $p_m = a/2$, (4)

$$T_m = (\mu p_m V_m) : (mR) = (\mu a^2) : (4mRb) =$$

$$= [\mu / (4mR)] (V_2 p_1 - V_1 p_2)^2 : [(V_2 - V_1) (p_1 - p_2)] = 490 \text{ K}. \quad (5)$$

2.3.23. Un tub subțire de lungime $\ell = 85,8$ mm așezat orizontal și închis la ambele capete, conține la mijloc o coloană de mercur de lungime $h = 9,8$ mm , de o parte și de alta fiind aer la presiunea normală. Dacă scoatem coloana de mercur din poziția sa de echilibru, care va fi frecvența micilor oscilații ale acestei coloane? Se consideră temperatura constantă. Pentru ce lungime a coloanei de mercur frecvența va fi minimă ?

Rezolvare. Dacă picătura de mercur se deplasează cu x , atunci de o parte presiunea scade, iar de cealaltă parte crește :

$$p_0(\ell - h)/2 = p' [(\ell - h)/2 - x] = p'' [(\ell - h)/2 + x] \quad (1)$$

și se naște o forță de revenire :

$$F = -(p' - p'')S = -p_0 \{[(\ell - h)4S] : [(\ell - h)^2 - 4x^2]\} \cdot x, \quad (2)$$

care pentru oscilații mici se aproximează:

$$F \approx -p_0 [4S/(\ell - h)] \cdot x = -kx, \quad k = 4Sp_0/(\ell - h), \quad (3)$$

deci forța este de tip **elastic** cu constanta cvasielastice k . Atunci :

$$v = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4Sp_0}{(\ell - h)\rho Sh}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{p_0}{(\ell - h)\rho h}} = 31,8 \text{ Hz.} \quad (4)$$

Sub radical la numitor avem un produs de doi factori variabili, $(\ell - h)$ și h , a căror sumă este constantă, ℓ . Atunci produsul lor este maxim când factorii sunt egali: $\ell - h = h \rightarrow h = \ell/2$, (5)

$$v_{\min} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}} = 2,0 \text{ Hz.} \quad (6)$$

2.3.24. Se dă ciclul Joule din figură. Transcrieți-l și în celelalte diagrame: $V - T$, $p - T$. Cunoscând temperaturile $T_{1,2,3}$ și exponentul adiabatic γ , calculați randamentul ciclului. Comparați cu randamentul ciclului Carnot funcționând între temperaturile extreme.

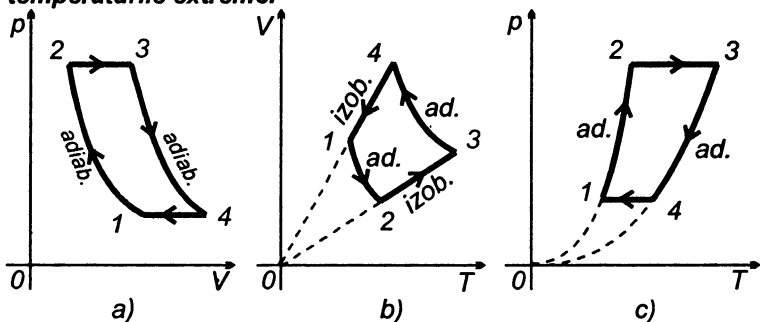


Fig.2.3.24

Rezolvare. Putem afla temperatura T_4 folosind ecuația adia-

$$\text{batei în } p, T: pV^\gamma + \text{const} \rightarrow TV^{\gamma-1} = \text{const} \rightarrow p^{(1-\gamma)/\gamma} T = \text{const}, \quad (1)$$

$$T_2/T_1 = (p_1/p_2)^{(1-\gamma)/\gamma} = (p_4/p_3)^{(1-\gamma)/\gamma} = T_3/T_4 \rightarrow T_4 = T_1 T_3 / T_2 \quad (2)$$

(rezultatul se obține imediat cu ajutorul teoremei de la problema 1.4.32).

$$Q_1 = \nu C_p (T_3 - T_2), \quad |Q_2| = \nu C_p (T_4 - T_1), \quad (3)$$

$$h = 1 - |Q_2|/Q_1 = 1 - (T_4 - T_1)/(T_3 - T_2) =$$

$$= 1 - T_1 \cdot (T_3/T_2 - 1) : (T_3 - T_2) = 1 - T_1/T_2. \quad (4)$$

$$\eta_C = 1 - T_1/T_3 > \eta, \text{ deoarece } T_3 > T_2. \quad (5)$$

2.3.25. Un mol de gaz perfect efectuează un ciclu Carnot inversat între temperaturile $T_{1,2}$. În cursul destinderii adiabatică gazul efectuează lucrul mecanic $L_{\text{ad}} = 3,24 \text{ J}$, iar în cursul destinderii izoterme entropia gazului crește cu $\Delta S = 24,9 \text{ J/K}$.

Știind că pentru a încălzi izobar același mol de gaz cu $\Delta T = 100 \text{ K}$ trebuie căldura $Q_p = 2,08 \text{ kJ}$ (se dă R), aflați : a) Căldura molară izocoră C_v a gazului, b) De câte ori crește volumul gazului în destinderea izotermă T_2 , c) Diferența temperaturilor $T_{1,2}$. d) Reprezentați grafic ciclul în diagramele $p - V$, $V - T$, $p - T$, $T - S$.

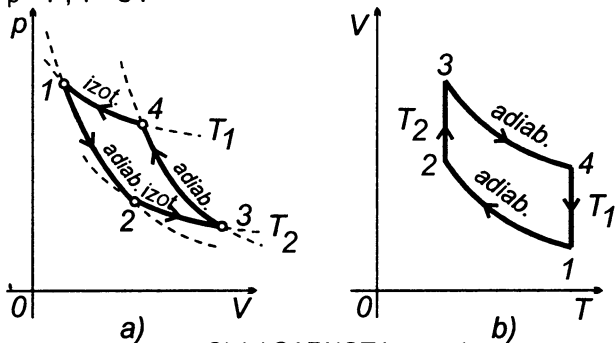


Fig.2.3.25

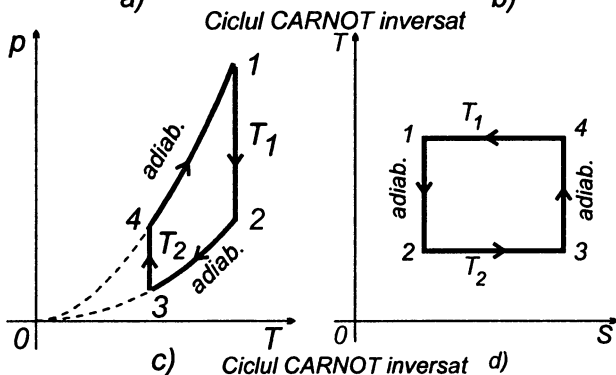


Fig.2.3.25

Rezolvare. a) $Q_p = \nu C_p \Delta T$, $C_v = C_p - R =$
 $= Q_p / (\nu \Delta T) - R = 12,4 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$. (1)

b) Pe izotermă variația entropiei este

$$\Delta S_T = \nu R \ln(V_3/V_2) \rightarrow V_3/V_2 = \exp\{\Delta S_T / (\nu R)\} = 20, \quad (2)$$

$$L_{ad} = -\nu C_v(T_2 - T_1) \rightarrow T_1 - T_2 = L_{ad} / (\nu C_v) = 260 \text{ K}. \quad (3)$$

* **2.3.26. Randamentul ciclului Carnot este influențat mai puternic de temperatura sursei calde sau de temperatura sursei reci ?**

Rezolvare. Randamentul ciclului Carnot : $\eta = 1 - T_2/T_1$. (1)

Diferențiem această relație considerând întâi o creștere dT a temperaturii T_1 a sursei calde : $d\eta = (T_2/T_1) dT/T_1$. (2)

Diferențiem acum randamentul considerând o creștere egală dT a temperaturii T_2 a sursei reci : $d\eta = -dT/T_1$. (2)

Se vede imediat că în al doilea caz randamentul se schimbă mai mult (fiindcă $T_2 < T_1$), și anume :

Randamentul ciclului Carnot crește mai mult dacă micșorăm temperatura sursei reci, decât dacă mărim cu același număr de grade temperatura sursei calde.

* 2.3.27. Aflați randamentul ciclului din figură știind exponentul adiabatic γ al gazului. Porțiunea 2 - 3 este liniară. Reprezentați ciclul în diagramele $V - T$, $p - T$.

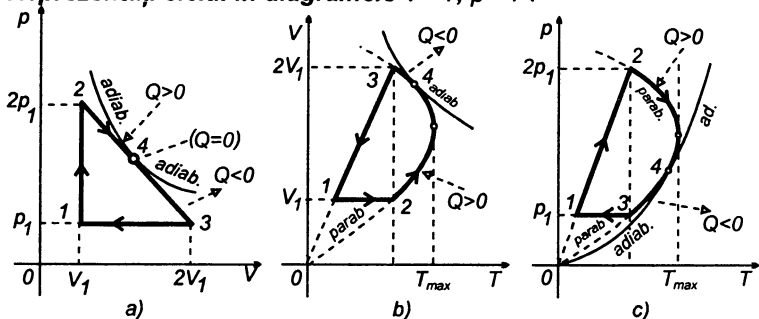


Fig.2.3.27

Rezolvare. Pe porțiunea 2 - 3 există un punct 4 de tangență cu adiabata, astfel încât pe porțiunea 2 - 4 gazul primește căldură, iar pe porțiunea 4 - 3 cedează căldură (v. problema 2.2.41).

Ecuatia transformării 2 - 3 :

$$p - 2p_1 = - (p_1/V_1) (V - V_1) \text{ sau } p = - (p_1/V_1) V + 3p_1. \quad (1)$$

În punctul 4 de tangență cu adiabata trebuie să avem :

$$dQ = \nu C_v dT + p dV = 0, \text{ dar } \nu R dT = p dV + V dp, \quad (2)$$

$$\text{deci } dQ = \nu C_v (p dV + V dp) / (\nu R) + p dV = 0, \quad (3)$$

$$\text{dar prin diferențierea ecuației (1) : } dp = - (p_1/V_1) dV, \quad (4)$$

$$\text{deci } dQ = (C_v/R)[p dV - V(p_1/V_1) dV] + p dV = 0, \quad (5)$$

$$\text{de unde } (C_v/R)(p - V p_1/V_1) + p = 0, \quad (6)$$

$$\text{dar din (1) : } -V p_1/V_1 = p - 3p_1,$$

$$\text{de aceea } (C_v/R)(2p - 3p_1) + p = 0,$$

$$\text{de unde } p_4 = 3p_1 / (2 + R/C_v) = 3p_1 / (\gamma + 1), \quad (7)$$

$$\text{apoi din (1): } V_4 = 3V_1 \cdot \gamma / (\gamma + 1), \quad (8)$$

$$\text{\u0219i din ecua\u021bia de stare: } T_4 = 9p_1 V_1 \gamma : [vR(\gamma + 1)^2]. \quad (9)$$

$$\begin{aligned} Q_{24} &= \Delta U_{24} + L_{24} = v C_v(T_4 - T_2) + (2p_1 + p_4)(V_4 - V_1)/2 = \\ &= (C_v/R) (vRT_4 - vRT_2) + \\ &= (1/2)p_1[(2\gamma + 5)/(\gamma + 1)]V_1[(2\gamma - 1)/(\gamma + 1)] = \\ &= [1/(\gamma - 1)] [9p_1 V_1 \gamma : (\gamma + 1)^2 - 2p_1 V_1] + \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} + (1/2) p_1 V_1 (2\gamma + 5) (2\gamma - 1) : (\gamma + 1)^2 &= (1/2) p_1 V_1 (2\gamma - 1)^2 : (\gamma^2 - 1), \\ Q_{12} &= v C_v(T_2 - T_1) = (C_v/R) (vRT_2 - vRT_1) = \\ &= (2p_1 V_1 - p_1 V_1) / (\gamma - 1) = p_1 V_1 / (\gamma - 1). \end{aligned} \quad (11)$$

C\u0103ldura absorbit\u0103:

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{24} = p_1 V_1 (4\gamma^2 - 2\gamma + 3) / [2(\gamma^2 - 1)]. \quad (12)$$

Lucrul mecanic pe ciclu:

$$L = (1/2)(2p_1 - p_1)(2V_1 - V_1) = (1/2) p_1 V_1, \quad (13)$$

deci randamentul;

$$\eta = L / Q_1 = (\gamma^2 - 1) : (4\gamma^2 - 2\gamma + 3). \quad (14)$$

Pentru gaz monoatomic $\eta = 16,5\%$, diatomic 12% , triatomic 10% .

*** 2.3.28. Un gaz perfect av\u00e2nd exponentul adiabatic $\gamma = 1,40$ sufer\u0103 o destindere, care \u00een diagrama $p - V$ se reprezint\u0103 printr-o dreapt\u0103 de ecua\u021bie $p = aV + b$, unde $a = -1,4 \cdot 10^8 \text{ N/m}^5$, $b = 2,4 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$. Calcula\u021bi pe ce por\u021biune a transform\u0103rii gazul absoarbe c\u0103ldur\u0103 \u0219i pe ce por\u021biune cedeaz\u0103 c\u0103ldur\u0103.**

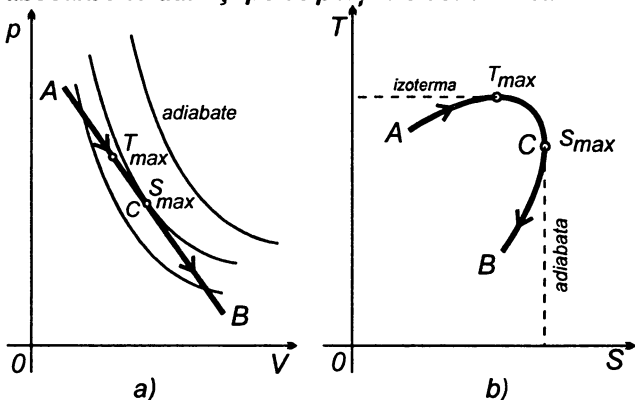


Fig.2.3.28

Rezolvare. Adiabatele (*reversibile*) sunt izentropice, adic\u0103 transform\u0103ri cu *entropie constant\u0103* :

$$dS = dQ / T = 0 \rightarrow S = \text{const.} \quad (1)$$

Semnul variației dS a entropiei este același cu semnul cantității de căldură schimbată $dQ (= TdS)$, deci când gazul absoarbe căldură, entropia crește. În diagrama $p - V$ adiabata este mai depărtată de origine, cu cât entropia corespunzătoare este mai mare.

Procesul din problemă se reprezintă în diagrama $p - V$ printr-o dreaptă cu pantă *negativă*. Dacă intersectăm această dreaptă cu familia de *adiabate*, atunci pe măsură ce sistemul evoluează de la A spre B, entropia crește, deci sistemul primește căldură, există apoi un punct C în care dreapta procesului este *tangentă* la o *adia-bată* acolo $dS = 0$ și $dQ = TdS = 0$ (sistemul pe o porțiune infinitesimală nu schimbă căldură cu mediul) și apoi în continuare entropia scade, deci sistemul cedează căldură. Prin urmare, punctul C căutat corespunde *maximului* entropiei în procesul A - B, adică corespunde condiției $dS = 0$ (*anularea derivatei!*) (v. expresia entropiei la problema 2.3.38) :

$$dS = v(C_v dp / p + C_p dV / V) \Big|_{p=aV+b} = 0, \quad dp = a dV, \quad (2)$$

$$dS = v(C_v a dV / p + C_p dV / V) = v C_v (a / p + \gamma / V) dV = 0,$$

$$a / p + \gamma / V = 0, \quad a / (aV + b) + \gamma / V = 0,$$

$$V_c = -\gamma b / [a(\gamma + 1)] = 1,00 \text{ L}, \quad (3)$$

$$p_c = aV_c + b = b / (\gamma + 1) = 100 \text{ kPa} \quad (4)$$

și din *ecuația de stare* : $T_c = p_c V_c / (vR) = -\gamma b^2 / [vR a(\gamma + 1)^2]$.

Am obținut pe această cale rezultatul de la problema 2.2.41.

**** 2.3.29. Într-un anumit proces căldura molară a gazului ideal variază după legea $C = A + BT^2$. Cunoscând C_v stabiliți ecuația procesului în variabilele V, T .**

$$\begin{aligned} \text{Rezolvare. Prin definiție : } C &= A + BT^2 = dQ / (vdT) = \\ &= (dU + pdV) / (vdT) = dU / (vdT) + (vRT / V) dV / (vdT) = \\ &= C_v + (RT / V) dV / dT. \end{aligned} \quad (1)$$

Separăm variabilele și integrăm:

$$RdV / V = (A + BT^2 - C_v) dT / T, \quad (2)$$

$$\int R \frac{dV}{V} = R \ln V = \int A \frac{dT}{T} + B \int T dT - \int C_v \frac{dT}{T} =$$

$$= A \ln T + BT^2 / 2 - C_v \ln T + K, \quad (3)$$

unde K este constanta de integrare,

$\ln V^R = \ln T^A + \ln e^{BT^2/2} - \ln T^{C_v} + K, \quad \ln \{ V^R T^{C_v - A} e^{-BT^2/2} \} = K,$
deci ecuația procesului :

$$\sqrt{R} T^{C_v - A} e^{-BT^2/2} = \text{const.} \quad (4)$$

**** 2.3.30. a) Ce lucru mecanic maxim se poate obține de la două corpuri având masele $m_{1,2}$, căldurile specifice $c_{1,2}$ și temperaturile $T_{10} > T_{20}$? Considerați apoi cazurile particulare :**

b) $m_1 = m_2$, $c_1 = c_2$, c) corpul m_2 este un termostat.

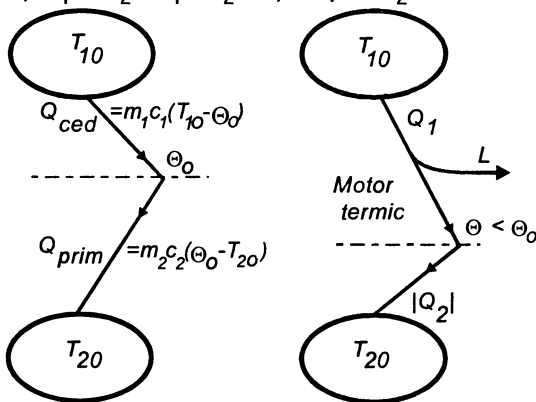


Fig.2.3.30

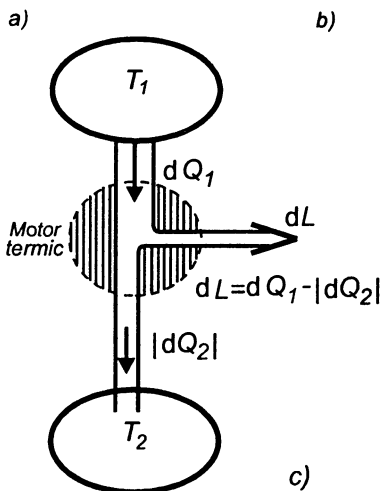


Fig.2.3.30

Rezolvare. Dacă am pune corpurile direct în contact termic între ele, atunci căldura cedată de corpul m_1 ar fi egală cu cea primită de corpul m_2 și sistemul n-ar produce lucru mecanic :

$L = 0$, iar temperatura finală de echilibru ar fi :

$$m_1 c_1 (T_{10} - \Theta) = m_2 c_2 (\Theta - T_{20}) ,$$

$$\Theta = (m_1 c_1 T_{10} + m_2 c_2 T_{20}) : (m_1 c_1 + m_2 c_2) , \quad (1)$$

respectiv $(T_{10} + T_{20}) / 2$, respectiv T_{20} . (1')

De aceea vom intercala, adică vom pune să funcționeze între corpuri, o *mașină termică* care produce lucru mecanic consumând căldură. Dintre toate mașinile termice care funcționează între două surse date, randamentul *maxim* îl are mașina termică cu ciclul *reversibil Carnot* al cărui randament *nu* depinde de substanța de lucru :

$$\eta = 1 - T_2 / T_1 . \quad (2)$$

Vom realiza deci o *succesiune* de cicluri *Carnot elementare* între cele două corpuri (surse de căldură) pentru care treptat temperatura corpului cald va scădea (pe măsură ce cedează căldură), iar temperatura corpului rece va crește (pe măsură ce primește căldură) până când temperaturile corpurilor se vor egala (v. figura).

a) La un moment dat ciclul *Carnot* elementar se va desfășura între temperaturile $T_{1,2}$, căldura primită de substanța de lucru de la corpul m_1 , respectiv cedată corpului m_2 și lucrul mecanic efectuat vor fi :

$$dQ_1 = m_1 c_1 (-dT_1) , \quad |dQ_2| = m_2 c_2 dT_2 ,$$

$$dL = dQ_1 - |dQ_2| = \eta dQ_1 = (1 - T_2 / T_1) dQ_1 . \quad (3)$$

Într-un ciclu *Carnot (reversibil)* raportul căldurilor absorbită/cedată este egal cu raportul temperaturilor absolute (*termodinamice*) ale surselor de căldură (v. problema 2,3,1)(ceea ce reprezintă de fapt egalitatea lui Clausius : variația de entropie pe ciclul *Carnot reversibil* este zero):

$$dQ_1 / |dQ_2| = T_1 / T_2 = -m_1 c_1 dT_1 / (m_2 c_2 dT_2) . \quad (4)$$

Separăm variabilele și integrăm: $m_1 c_1 dT_1 / T_1 = -m_2 c_2 dT_2 / T_2$,

$$\int_{T_{10}}^{\Theta} \frac{m_1 c_1 dT_1}{T_1} = - \int_{T_{20}}^{\Theta} \frac{m_2 c_2 dT_2}{T_2} ,$$

$$m_1 c_1 \ln(\Theta / T_{10}) = -m_2 c_2 \ln(\Theta / T_{20}) , \quad (5)$$

de unde rezultă temperatura finală comună Θ a corpurilor :

$$\ln \Theta = (m_1 c_1 \ln T_{10} + m_2 c_2 \ln T_{20}) : (m_1 c_1 + m_2 c_2) ,$$

$$\Theta = [T_{10}^{m_1 c_1} \cdot T_{20}^{m_2 c_2}]^{1:(m_1 c_1 + m_2 c_2)} . \quad (6)$$

Temperatura finală de echilibru Θ (6) a corpurilor este mai *mică* decât în cazul (1) al simplului contact termic.

Lucrul mecanic produs de sistem se poate obține imediat din bilanțul energiilor:

$$L = m_1 c_1 (T_{10} - \Theta) - m_2 c_2 (\Theta - T_{20}) . \quad (7)$$

Randamentul global al sistemului, de producere a lucrului mecanic, se poate defini, de exemplu, astfel:

$$\eta = L / Q_{\text{abs}} = L / [m_1 c_1 (T_{10} - \Theta)] . \quad (8)$$

b) În cazul particular $m_1 = m_2$, $c_1 = c_2$, găsim :

$$\Theta = \sqrt{T_{10} T_{20}} < (T_{10} + T_{20}) / 2 , \quad (9)$$

$$L = mc (\sqrt{T_{10}} - \sqrt{T_{20}})^2 , \quad \eta = 1 - \sqrt{T_{20} / T_{10}} . \quad (10)$$

c) În acest caz temperatura finală de echilibru : $\Theta = T_{20}$, ($m_2 \rightarrow \infty$). Lucrul mecanic realizat se obține prin însumarea (integrarea) lucrurilor mecanice elementare produse de ciclurile *Carnot elementare* : $dL = (1 - T_{20} / T_1) dQ_1 = (1 - T_{20} / T_1) m_1 c_1 (-dT_1)$, de unde prin integrare :

$$\begin{aligned} L &= \int dL = \int_{T_{10}}^{T_{20}} m_1 c_1 (-dT_1) + \int_{T_{10}}^{T_{20}} \frac{T_{20} m_1 c_1 dT_1}{T_1} = \\ &= m_1 c_1 [T_{10} - T_{20} - T_{20} \ln(T_{10} / T_{20})] . \end{aligned} \quad (11)$$

Randamentul :

$$\eta = 1 - [T_{20} / (T_{10} - T_{20})] \ln(T_{10} / T_{20}) . \quad (12)$$

**** 2.3.31. Calculați variația de entropie a unui sistem constituit din $m = 100$ g fier și apă în cantitate foarte mare, în urma cufundării fierului încălzit la $t = 300^\circ\text{C}$, în apa aflată la $\theta = 13,5^\circ\text{C}$. Se cunoaște căldura specifică a fierului.**

Rezolvare. Deoarece apa este în cantitate foarte mare, temperatura finală de echilibru va fi temperatura apei θ . Atunci variația de entropie a sistemului :

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_{\text{Fe}} + \Delta S_{\text{apă}} = \\ &= \int_{\text{Fe}} \frac{dQ}{T} + \int_{\text{apa}} \frac{dS}{T} = \int_T^\Theta \frac{mcdT}{T} + \frac{1}{\Theta} \int dQ = \\ &= mc \ln(\Theta / T) + mc(T - \Theta) / \Theta = mc[T / \Theta - 1 - \ln(T / \Theta)] = 14 \text{ J/K} . \end{aligned}$$

**** 2.3.32. La temperaturi foarte joase, apropiate de zero absolut, căldura specifică a solidelor este dată de legea lui Debye : $c = aT^3$, $a = \text{const}$. Calculați căldura necesară unui solid de masă m pentru a se încălzi de la T_1 la T_2 . Care este variația de entropie ?**

$$\text{Rezolvare. Prin definiție : } c = dQ / (mdT) , \quad (1)$$

$$\text{de unde} \quad dQ = mcdT = maT^3 dT , \quad (2)$$

$$Q = \int dQ = \int_{T_1}^{T_2} maT^3 dT = \frac{1}{4} ma (T_2^4 - T_1^4) . \quad (3)$$

$$\Delta S = \int dS = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mcdT}{T} = \int_{T_1}^{T_2} maT^2 dT = \frac{1}{3} ma(T_2^3 - T_1^3). \quad (4)$$

**** 2.3.33. Căldura specifică a argintului poate fi aproximată prin formula :** $c_p = a + bT - c/T^2$, unde $a = 222 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$,

$$b = 0,049 \text{ J/(kg} \cdot \text{K}^2), \quad c = 239,6 \text{ J} \cdot \text{K/kg}.$$

Calculați căldura absorbită și variația de entropie a $m = 1,00 \text{ kg}$ **Ag la încălzirea sa de la** $T_1 = 300 \text{ K}$ **la** $T_2 = 1000 \text{ K}$.

Rezolvare. $dQ = mc_p dT$,

$$Q = \int dQ = \int_{T_1}^{T_2} mc_p dT = \int_{T_1}^{T_2} m \left(a + bT - \frac{c}{T^2} \right) dT =$$

$$= ma(T_2 - T_1) + (1/2)mb(T_2^2 - T_1^2) + mc(1/T_2 - 1/T_1) = 168 \text{ kJ}. \quad (1)$$

$$dS = \frac{dQ}{T}, \quad \Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mc_p dT}{T} = \int_{T_1}^{T_2} m \left(\frac{a}{T} + b - \frac{c}{T^3} \right) dT =$$

$$= ma \ln(T_2/T_1) + mb(T_2 - T_1) + (c/2)(1/T_2^3 - 1/T_1^2) = 302 \text{ J/K}. \quad (2)$$

**** 2.3.34. Calculați variația de entropie la încălzirea unei mase** $m = 0,100 \text{ kg}$ **gheață de la** $t_g = -20^\circ\text{C}$ **până la transformarea sa în vapori la** $t_f = 100^\circ\text{C}$.

Rezolvare. Descompunem procesul în 4 etape :

$$\text{încălzirea gheții: } \Delta S_1 = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_g}^{T_0} \frac{mc_g dT}{T} = mc_g \ln \frac{T_0}{T_g}. \quad (1)$$

$$\text{Topirea gheții: } \Delta S_2 = \int \frac{dQ}{T_0} = \frac{1}{T_0} \int dQ = \frac{1}{T_0} Q_t = \frac{1}{T_0} m\lambda_g. \quad (2)$$

$$\text{Încălzirea apei: } \Delta S_3 = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_0}^{T_f} \frac{mc_a dT}{T} = mc_a \ln \frac{T_f}{T_0}. \quad (3)$$

$$\text{Vaporizarea apei: } \Delta S_4 = \int \frac{dQ}{T_f} = \frac{1}{T_f} \int dQ = \frac{1}{T_f} Q_v = \frac{1}{T_f} m\lambda_v. \quad (4)$$

$$\text{În total: } \Delta S = \sum \Delta S_i =$$

$$= m[c_g \ln(T_0/T_g) + \lambda_g/T_0 + c_a \ln(T_f/T_0) + \lambda_v/T_f] = 88 \text{ J/K}. \quad (5)$$

**** 2.3.35. O masă** $m = 8,0 \text{ g}$ **de oxigen trece de la volumul** $V_1 = 10,0 \text{ L}$ **la** $t_1 = 80^\circ\text{C}$ **la volumul** $V_2 = 40 \text{ L}$ **la** $t_2 = 300^\circ\text{C}$.

Calculați variația de entropie.

$$\begin{aligned} \text{Rezolvare. } \Delta S &= \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{dU + pdV}{T} = \int \frac{\nu C_V dT + pdV}{T} = \\ &= \nu C_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \int_{V_1}^{V_2} \frac{(\nu RT/V) dV}{T} = \\ &= \nu C_V \ln(T_2/T_1) + \nu R \ln(V_2/V_1) = 5,4 \text{ J/K.} \end{aligned}$$

**** 2.3.36. O masă $m = 6,0 \text{ g}$ de hidrogen trece de la volumul $V_1 = 20,0 \text{ L}$ sub presiunea $p_1 = 150 \text{ kPa}$ la volumul $V_2 = 60 \text{ L}$ sub presiunea $p_2 = 100 \text{ kPa}$. Calculați variația de entropie.**

$$\text{Rezolvare. } \Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{dU + pdV}{T} = \int \frac{\nu C_V dT + pdV}{T} \quad (1)$$

Eliminăm pe T și dT cu ajutorul ecuației de stare $\nu RT = pV$, $\nu R dT = pdV + V dp$, ca să rămânem numai în variabilele p , V , conform datelor problemei:

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_{V_1}^{V_2} \nu(C_V + R) \frac{dV}{V} + \int_{p_1}^{p_2} \nu C_V \frac{dp}{p} = \\ &= \nu C_p \ln(V_2/V_1) + \nu C_V \ln(p_2/p_1) = 71 \text{ J/K.} \end{aligned} \quad (2)$$

**** 2.3.37. O masă $m = 29 \text{ g}$ de aer trece din starea în condiții normale în starea cu temperatura $t_f = 100^\circ\text{C}$ și presiunea de $n = 10$ ori mai mare. Calculați variația de entropie.**

Rezolvare.

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{\nu C_V dT + pdV}{T} = \int \frac{\nu C_V dT + d(pV) - V dp}{T} = \\ &= \int \frac{\nu C_V dT + \nu R dT - V dp}{T} = \int \frac{\nu C_p dT - (\nu RT/p) dp}{T} = \\ &= \nu C_p \ln(T_f/T_0) - \nu R \ln(p_2/p_1) = \\ &= (m/\mu)R[(7/5)\ln(T_f/T_0) - \ln n] = -15,5 \text{ J/K.} \end{aligned}$$

**** 2.3.38. Un gaz ideal diatomic se destinde după legea $p = aV$, unde $a = 1,0 \cdot 10^8 \text{ N/m}^5$, de la un volum $V_1 = 1,00 \text{ L}$ până la un volum $V_2 = 2,00 \text{ L}$. Calculați variația de entropie pentru 1 mol de gaz.**

$$\begin{aligned} \text{Rezolvare. } \Delta S &= \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{dU + pdV}{T} = \\ &= \int_{T_1}^{T_2} \nu C_V \frac{dT}{T} + \int_{V_1}^{V_2} \frac{pdV}{pV/(\nu R)} = \nu C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + \nu R \ln \frac{V_2}{V_1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Aceasta este variația entropiei exprimată în variabilele T , V . Putem
156

exprima foarte ușor variația entropiei și în celelalte perechi de variabile, cu ajutorul *ecuației de stare*, astfel :

$$\ln(V_2/V_1) = \ln[(RT_2/p_2) : (RT_1/p_1)] = \ln(T_2/T_1) - \ln(p_2/p_1),$$

astfel încât (1) devine : $\Delta S = \nu C_p \ln(T_2/T_1) - \nu R \ln(p_2/p_1)$. (2)

La fel, $\ln(T_2/T_1) = \ln\{ [p_2 V_2 / (\nu R)] : [p_1 V_1 / (\nu R)] \} =$
 $= \ln(p_2/p_1) + \ln(V_2/V_1)$,

astfel încât (1) devine : $\Delta S = \nu C_v \ln(p_2/p_1) + \nu C_p \ln(V_2/V_1)$. (3)

Observăm că **entropia este o funcție de stare**, deci ΔS depinde numai de stările extreme 1, 2 și nu depinde de transformarea cvasistatică (de echilibru) care duce de la 1 la 2.

Revenim la problema noastră :

$$\Delta S = \nu C_v \ln[aV_2/(aV_1)] + \nu C_p \ln(V_2/V_1) =$$

$$= \nu(C_v + C_p) \ln(V_2/V_1) = \nu 6 R \ln(V_2/V_1) = 34,5 \text{ J/K}. \quad (4)$$

**** 2.3.39. O cantitate ν mol de gaz perfect având exponentul adiabetic γ suferă o transformare politropică de exponent k . Calculați variația de entropie, cunoscând : a) temperaturile $T_{1,2}$ ($TV^{k-1} = \text{const}$), b) volumele $V_{1,2}$ ($pV^k = \text{const}$), c) presiunile $p_{1,2}$ ($TP^{(1-k)/k} = \text{const}$).**

Rezolvare. $dS = dQ/T$, $dQ = dU + dL = \nu C_v dT + pdV$. (1)

a) Să exprimăm lucrul mecanic elementar $dL = pdV$ prin dT . Să diferențiem logaritmec ecuția procesului politropic $TV^{k-1} = \text{const}$:

$$dT/T + (k-1)dV/V = 0 \text{ sau } dT/T + (k-1)dV : (\nu RT/p) = 0, \quad (2)$$

de unde $dL = pdV = -[\nu R / (k-1)] dT$, (3)

astfel încât : $dQ = \nu C_v dT + [\nu R / (1-k)] dT =$

$$\nu[C_v + R / (1-k)] dT = \nu C_k dT, \quad (4)$$

unde $C_k = C_v + R / (1-k)$ (5)

este **căldura molară în procesul politropic**. Am regăsit rezultatul cunoscut și puteam să-l folosim de la început.

$$\Delta S = \int dS = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\nu C_k dT}{T} = \nu C_k \ln \frac{T_2}{T_1} =$$

$$= \nu[C_v + R / (1-k)] \ln(T_2/T_1) = \nu[(k-\gamma) / (k-1)] C_v \ln(T_2/T_1), \quad (6)$$

unde γ este exponentul adiabetic, $\gamma = C_p / C_v = c_p / c_v$.

b) Putem obține expresia variației entropiei în variabila V în mai multe moduri, de exemplu, din (2) avem imediat :

$$dT/T = (1-k)dV/V, \quad (7)$$

$$\text{astfel încât : } \Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\nu C_k dT}{T} = \nu C_k (1 - k) \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} =$$

$$= \nu [C_v + R / (1 - k)] (1 - k) \ln(V_2 / V_1) = \nu (\gamma - k) C_v \ln(V_2 / V_1) \quad (8)$$

sau direct din (6) înlocuind raportul temperaturilor :

$$T_2 / T_1 = (V_1 / V_2)^{k-1} \quad \text{din } TV^{k-1} = \text{const.} \quad (9)$$

c) Expresia variației entropiei în variabila p iarăși se poate obține în mai multe moduri, de exemplu, exprimăm raportul volumelor din (8): $V_2 / V_1 = (p_1 / p_2)^{1/k}$ din $pV^k = \text{const}$, (10)

atunci (8) devine :

$$\Delta S = \nu (\gamma - k) C_v (-1/k) \ln(p_2 / p_1) = \nu [(k - \gamma) / k] C_v \ln(p_2 / p_1) \quad (11)$$

sau plecăm de la (6) înlocuind raportul temperaturilor :

$$T_2 / T_1 = (p_1 / p_2)^{(1 - k)/k} \quad \text{din } Tp^{(1 - k)/k} = \text{const.} \quad (12)$$

**** 2.3.40. Două vase de volume $V_{1,2}$ conțin mase $m_{1,2}$ de gaze diferite, cu masele molare respective $\mu_{1,2}$ la aceeași temperatură. Vasele se pun în legătură și gazele se amestecă. Calculați variația de entropie în acest proces .**

Rezolvare. Entropia este o funcție aditivă de stare. Pentru a calcula variația de entropie putem folosi orice proces reversibil cuasistatic (de echilibru) care duce de la starea inițială la cea finală. În cazul problemei date, putem ajunge din starea inițială la cea finală printr-un proces *izoterm* de destindere a fiecărui gaz de la volumul său inițial până la întregul volum $V_1 + V_2$:

$$\Delta S = \int_1 \frac{dQ}{T} + \int_2 \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int_1 dQ + \frac{1}{T} \int_2 dQ = \frac{1}{T} Q_1 + \frac{1}{T} Q_2 =$$

$$= (1/T) \nu_1 RT \ln[(V_1 + V_2) / V_1] + (1/T) \nu_2 RT \ln[(V_1 + V_2) / V_2] =$$

$$= (m_1 / \mu_1) R \ln[(V_1 + V_2) / V_1] + (m_2 / \mu_2) R \ln[(V_1 + V_2) / V_2] .$$

**** 2.3.41. Un vas termoizolat este împărțit în două compartimente de volume $V_{1,2}$ printr-un perete. În compartimentul V_1 este o cantitate ν de gaz perfect, iar celălalt compartiment este vidat. Se înlătură peretele și gazul se destinde. Calculați variația de entropie.**

Rezolvare. Entropia este o funcție aditivă de stare. Pentru a calcula variația de entropie într-un proces *irreversibil* (ca cel din problemă) care unește două stări de *echilibru* termodinamic este suficient să imaginăm un proces *reversibil* cuasistatic (de echilibru) care să conducă de la starea inițială la cea finală.

În cazul problemei date, sistemul este izolat termic de exterior, deci *nu* schimbă căldură cu mediul exterior. De asemenea, la destinderea *liberă în vid* gazul *nu* efectuează *lucru mecanic*. Atunci *principiul I* al termodinamicii ne dă :

$$\Delta U = Q - L = 0 \rightarrow U = \text{const.} \quad (1)$$

Dar energia internă a gazului perfect depinde *numai de temperatură* (*legea lui Joule* și experimentul lui *Joule* ca cel din problemă). Prin urmare, în procesul *irreversibil* din problemă, temperatura finală a gazului este aceeași cu cea inițială. Acum putem trece din starea inițială în starea finală printr-un proces *izoterm reversibil*,

$$\begin{aligned} \text{deci} \quad \Delta S &= \int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int dQ = \frac{1}{T} Q = \\ &= (1/T) \nu RT \ln [(V_1 + V_2) / V_1] = \nu R \ln [(V_1 + V_2) / V_1]. \end{aligned} \quad (2)$$

* * *

3. TEORIA CINETICO-MOLECULARĂ

3.1. Un fascicul paralel de molecule de azot (N_2) având viteza $v = 400$ m/s cade pe un perete sub unghiul de incidență $\alpha = 30^\circ$. Concentrația moleculelor din fascicul este $n = 9,0 \cdot 10^{24} \text{ m}^{-3}$. Aflați presiunea exercitată pe perete considerând ciocnirea perfect elastică.

Rezolvare. Întâi să calculăm forța exercitată pe perete. Forța se calculează prin variația de impuls pe unitatea de timp, conform principiului fundamental (II) al mecanicii :

$$\vec{F} = \Delta \vec{p} : \Delta t, \quad F = |\Delta \vec{p}| : \Delta t. \quad (1)$$

Pentru o singură particulă variația de impuls la ciocnirea oblică, perfect elastică, cu un perete, este

$$|\Delta \vec{p}| = |\vec{p}' - \vec{p}| = 2mv \cos \alpha, \quad (2)$$

deci forța exercitată asupra particulei este normală la perete și atunci asupra peretelui se va exercita o forță egală în modul și de sens opus, deci spre perete.

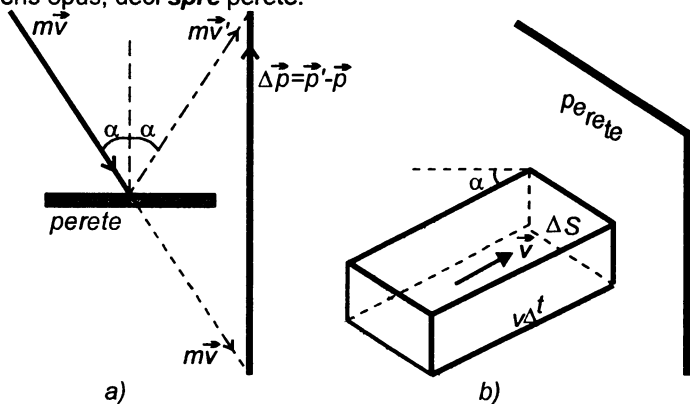


Fig.3.1

Să calculăm numărul de particule care sosesc la perete pe o arie ΔS în timpul Δt . Toate aceste particule sunt cele cuprinse în paralelipipedul evidențiat în figură, a cărui muchie este $v\Delta t$ și al cărui volum este $\Delta V = \Delta S \cdot v\Delta t \cos \alpha$, deci

$$\Delta N = \Delta V \cdot n = \Delta S v\Delta t \cos \alpha \cdot n. \quad (3)$$

Înmulțind cu variația de impuls a unei particule (2) și împărțind la intervalul de timp Δt (pentru a obține variația de impuls pe unitatea de timp) și în sfârșit, împărțind la aria ΔS , obținem **presiunea** :

$$\begin{aligned} p &= \Delta F : \Delta S = \Delta N |\Delta \vec{p}| : (\Delta S \Delta t) = \\ &= \Delta S v\Delta t \cos \alpha \cdot n \cdot 2 m v \cos \alpha : (\Delta S \Delta t) = 2 m n v^2 \cos^2 \alpha. \end{aligned} \quad (4)$$

Dar masa unei molecule $m = \mu / N_A$, deci

$$p = 2 (\mu / N_A) n v^2 \cos^2 \alpha = 101 \text{ kPa}. \quad (5)$$

3.2. O odaie este încălzită de la temperatura $t_1 = 15^\circ\text{C}$ la $t_2 = 27^\circ\text{C}$. Cu cât la sută s-a schimbat numărul moleculelor de aer din cameră ?

Rezolvare. Numărul de moli ν se poate calcula în trei feluri :

$$\nu = m / \mu = N / N_A = V / V_\mu. \quad (1)$$

Atunci ecuația de stare se scrie :

$$pV = (m / \mu)RT = (N / N_A) RT = (V / V_\mu) RT = N kT, \quad k = R / N_A, \quad (2)$$

unde k este **constantă lui Boltzmann**. Atunci raportul cerut este

$$\begin{aligned} (N_2 - N_1) / N_1 &= [pV / (kT_2) - pV / (kT_1)] : [pV / (kT_1)] = \\ &= (T_1 - T_2) / T_2 = -4,0 \%, \end{aligned} \quad (3)$$

numărul moleculelor **scade** cu 4 % .

3.3. Calculați viteza pătratică medie (viteza termică) a moleculelor unui gaz, știind densitatea sa $\rho = 1,20 \text{ kg/m}^3$ și presiunea $p = 100 \text{ kPa}$.

$$\text{Rezolvare. } v_T = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}, \text{ dar } pV = (m / \mu)RT \text{ și } \rho = m / V, \quad (1)$$

$$v_T = \sqrt{\frac{3pV}{m}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = 500 \text{ m/s}. \quad (2)$$

3.4. Calculați concentrația moleculelor de azot și densitatea sa știind presiunea $p = 56 \text{ kPa}$ și viteza pătratică medie $v_T = 600 \text{ m/s}$.

$$\text{Rezolvare. } \rho = (1/3) n m_o \overline{v^2} = (1/3) n (\mu / N_A) \cdot v_T^2, \quad (1)$$

$$n = N_A \cdot 3\rho : (\mu v_T^2) = 1,0 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}, \quad (2)$$

$$\rho = n m_o = 3\rho / v_T^2 = 0,467 \text{ kg/m}^3 . \quad (3)$$

3.5. Calculați energia internă a unui gaz ideal diatomic care se află la presiunea $p = 100 \text{ kPa}$, are densitatea $\rho = 1,25 \text{ kg/m}^3$ și masa $m = 10,0 \text{ g}$.

$$\begin{aligned} \text{Rezolvare. } U &= \nu C_V T = \nu (5R/2)T = (5/2) pV = \\ &= (5/2) p m / \rho = 2,00 \text{ kJ} . \end{aligned}$$

3.6. O masă $m = 14 \text{ g}$ N_2 se află într-un vas închis la temperatura inițială $t_1 = 27^\circ\text{C}$. a) Câtă căldură trebuie transmisă gazului pentru a mări viteza pătratică medie a moleculelor de $n = 2,0$ ori ? b) De câte ori cresc presiunea și densitatea ?

$$\text{Rezolvare. a) } Q = \nu C_V (T_2 - T_1) = \nu C_V T_1 (T_2/T_1 - 1) , \quad (1)$$

dar

$$v_T = \sqrt{3RT/\mu} , \quad v_{T_2}/v_{T_1} = \sqrt{T_2/T_1} , \quad (2)$$

$$Q = (m/\mu) C_V T_1 (v_{T_2}^2 / v_{T_1}^2 - 1) = (m/\mu) (5R/2) (n^2 - 1) = 9,35 \text{ kJ} . \quad (3)$$

b) Transformarea izocoră :

$$p_2/p_1 = T_2/T_1 = n^2 = 4,0 ; \quad \rho = m/V , \quad \rho_2/\rho_1 = 1,00 . \quad (4)$$

3.7. Volumul unei mase $m = 12,0 \text{ g}$ de gaz ideal a fost mărit izoterm de $n = 2,0$ ori consumând căldura $Q = 693 \text{ J}$. Aflați viteza pătratică medie (viteza termică) a moleculelor gazului .

$$\text{Rezolvare. } Q = (m/\mu) RT \ln(V_2/V_1) = (m/\mu) RT \ln n , \quad (1)$$

$$v_T = \sqrt{3RT/\mu} = \sqrt{3Q/(m \ln n)} = 500 \text{ m/s} . \quad (2)$$

3.8. O masă $m = 3,04 \text{ g}$ de gaz ideal se destinde izoterm de la un volum inițial $V_1 = 1,00 \text{ L}$ până la o presiune finală normală. Viteza pătratică medie a moleculelor este $u = 1,00 \text{ km/s}$.

Calculați : a) Lucrul mecanic efectuat de gaz, b) căldura absorbită, c) Variația energiei interne.

$$\text{Rezolvare. a) } L = (m/\mu) RT \ln(V_2/V_1) , \text{ dar } u = \sqrt{3RT/\mu} ,$$

$$p_2 V_2 = (m/\mu) RT , \quad (1)$$

de unde rezultă $RT/\mu = u^2/3$, $V_2 = mRT/(\mu p_2) = mu^2/(3p_2)$,

$$L = (1/3) mu^2 \ln [mu^2/(3p_2) : V_1] = 2,3 \text{ kJ} . \quad (2)$$

$$\text{b) } Q = L , \quad \text{c) } \Delta U = 0 \text{ (izoterma gazului ideal !)} . \quad (3)$$

3.9. Un gaz are densitatea $\rho = 1,10 \text{ kg/m}^3$ la presiunea $p = 94,66 \text{ kPa}$ și temperatura $t = 27^\circ\text{C}$, Calculați viteza pătratică medie a moleculelor și masa molară a gazului.

Rezolvare. $v_T = \sqrt{3RT/\mu}$, dar $\rho = \mu p / (RT)$, (1)

$$v_T = \sqrt{3p/\rho} = 508 \text{ m/s} , \quad (2)$$

$$\mu = \rho RT / p = 0,029 \text{ kg/mol (probabil aer)} . \quad (3)$$

3.10. Într-un vas de volum $V = 2,00 \text{ L}$ se află $m = 16 \text{ g O}_2$ la presiunea $p = 106,66 \text{ kPa}$. Aflați : a) Viteza pătratică medie a moleculelor, b) Numărul total de molecule, c) Energia internă a gazului.

Rezolvare. a) $v_T = \sqrt{3RT/\mu}$, dar $pV = (m/\mu)RT$,

$$v_T = \sqrt{3pV/m} = 200 \text{ m/s} . \quad (1)$$

b) $N = \nu N_A = (m/\mu)N_A = 3,0 \cdot 10^{25}$. (2)

c) $U = \nu C_V T = (C_V/R) \nu RT = (C_V/R) pV = (5/2) pV = 533 \text{ J}$. (3)
 $(C_V = 5R/2 \text{ la gaze diatomice})$.

3.11. Încălzind un gaz cu $\Delta T = 100 \text{ K}$ viteza pătratică medie a moleculelor a crescut de la $v_{T_1} = 400 \text{ m/s}$ la $v_{T_2} = 500 \text{ m/s}$.

Aflați masa molară a gazului (se dă constanta R).

Rezolvare. $v_{T_1}^2 = 3RT_1/\mu$, $v_{T_2}^2 = 3R(T_1 + \Delta T)/\mu$, (1)

$$\mu = 3R\Delta T : (v_{T_2}^2 - v_{T_1}^2) = 0,028 \text{ kg/mol (probabil azot)} . \quad (2)$$

3.12. Calculați numărul de molecule din unitatea de masă a unui gaz, cunoscând viteza pătratică medie a moleculelor $v_T = 500 \text{ m/s}$ la temperatura $t = 0^\circ\text{C}$ și constanta lui Boltzmann k .

Rezolvare. $v_T^2 = 3RT/\mu$, $n^* = N/m = \nu N_A / (\nu\mu) = N_A/\mu =$
 $= N_A v_T^2 / (3RT) = v_T^2 / (3kT) = 2,2 \cdot 10^{25} \text{ kg}^{-1}$. (1)

Observăm că $n^* = N_A/\mu = 1/m_0$, unde m_0 este masa unei singure molecule.

3.13. În aer se află în suspensie fum format din particule fine de masă $m_f = 0,010 \mu\text{g}$. De câte ori este mai mică viteza pătratică medie a particulelor de fum decât cea a moleculelor de aer ? Dar energia cinetică medie ?

Rezolvare. Particulele de fum formează un "gaz" ("nor") care va fi în echilibru termic cu moleculele de aer. Or, condiția de echilibru termic înseamnă egalitatea energiilor cinetice medii de tranlație ale particulelor :

$$\frac{1}{2} m_f \overline{v_f^2} = \frac{1}{2} m_a \overline{v_a^2} = \frac{3}{2} kT \quad (1)$$

$$\text{sau } v_{Tf} = \sqrt{3kT/m_f}, \quad v_{Ta} = \sqrt{3kT/m_a} = \sqrt{3kT/(\mu_a/N_A)}, \quad (2)$$

$$v_{Ta}/v_{Tf} = \sqrt{N_A m_f / \mu_a} = 14 \cdot 10^6, \quad (3)$$

$$v_{Tf} = \sqrt{3kT/m_f} \approx 3,6 \cdot 10^{-2} \text{ mm/s}. \quad (4)$$

$$\overline{\varepsilon_a} = 5kT/2, \quad \overline{\varepsilon_f} = 6kT/2 = 3kT; \quad \overline{\varepsilon_a} : \overline{\varepsilon_f} = 5/6, \quad (5)$$

$$\overline{\varepsilon_f} = 3kT \approx 4 \cdot 10^{-23} \text{ J}. \quad (6)$$

Observăm că moleculele de aer au 5 grade de libertate (3 de translație + 2 de rotație conform modelului "halteră" pentru moleculele diatomice), iar particulele de fum au 6 grade de libertate (3 translații + 3 rotații, ca la un corp rigid). În timp ce *energiile cinetice sunt practic egale, vitezele termice sunt total diferite*, din cauza maseilor total diferite ale particulelor.

3.14. Gazul dintr-un cilindru se destinde, pistonul deplasându-se cu viteza $u = 1,00 \text{ m/s}$. Cu cât la sută din energia sa cinetică pierde o moleculă de viteză $v = 400 \text{ m/s}$ care ciocnește perfect elastic, frontal, pistonul ?

Rezolvare. Luând sensul pozitiv al axei Ox în sensul vitezei v , putem aplica formulele cunoscute din mecanică :

$$v' = 2u - v, \quad u' = u \quad (1)$$

sau putem judeca direct : La ciocnirea frontală perfect elastică cu un perete fix particula își schimbă doar sensul vitezei. Atunci trecem la un SR legat de perete. Față de perete (piston) molecula are viteza relativă $v - u$, deci după ciocnire va avea viteza $-(v - u) = u - v$. Trecând înapoi la SR legat de laborator trebuie să adăugăm u :

$$v' = 2u - v. \quad (2)$$

$$-\Delta E_c / E_c = [m_0 v^2 / 2 - m_0 (2u - v)^2 / 2] : (m_0 v^2 / 2) =$$

$$= (4uv - 4u^2) / v^2 = (4u/v)(1 - u/v) \approx 4u/v = 1,0\%, \quad (u \ll v). \quad (3)$$

3.15. Unui vas conținând azot i se imprimă brusc viteza $v_0 = 10 \text{ m/s}$. Aflați variația de temperatură a gazului, la echilibru termic.

Rezolvare. În SR legat de vas toate moleculele capătă brusc energia cinetică suplimentară $(1/2) m_0 v_0^2$ care treptat se distribuie statistic uniform pe toate gradele de libertate de mișcare ale moleculelor, prin intermediul ciocnirilor, ceea ce reprezintă o creștere de temperatură :

$$(1/2) m_0 v_0^2 = (i/2) k \Delta T, \quad i = 5 \text{ (gaz diatomic)}, \quad (1)$$

$$\Delta T = m_0 v_0^2 / (i k) = \mu v_0^2 / (5R) \approx 0,07 \text{ K}. \quad (2)$$

3.16. La ce temperatură energia cinetică medie a atomilor de heliu este suficientă pentru a învinge atracția gravitațională terestră și a părăsi atmosfera ?

Rezolvare. Energia cinetică medie $(1/2) m_0 v_T^2$ trece în energia potențială gravitațională care crește de la $-\gamma m_0 M / R_P$ (R_P , M - raza și masa Pământului) până la zero :

$$(1/2) m_0 v_T^2 = 0 - (-\gamma m_0 M / R_P) = m_0 R_P g_0, \quad (1)$$

unde $g_0 = \gamma M / R_P^2$ este accelerația gravitațională la nivelul mării.

Reamintim expresia energiei *potențiale* de interacție gravitațională între două puncte materiale sau două sfere omogene:

$$E_p = -\gamma m_1 m_2 / r^2, \quad \gamma - \text{constanta gravitațională}. \quad (2)$$

$$(1/2) m_0 v_T^2 = 3kT/2 = m_0 g_0 R_P = (\mu / N_A) g_0 R_P, \quad (3)$$

$$T = (2/3) \mu g_0 R_P / R = 20 \text{ kK}, \quad (k = R / N_A). \quad (4)$$

3.17. Calculați căldurile specifice $c_{v,p}$ ale unui gaz ideal diatomic, știind densitatea sa în condiții normale : $\rho_0 = 1,43 \text{ kg/m}^3$. Se dă fie volumul molar al gazelor ideale în condiții normale, $V_{\mu 0}$, fie presiunea și temperatura normale .

Rezolvare. $C_v = 5R/2$, $c_v = C_v / \mu = 5R / (2\mu)$, (1)

dar $\rho_0 = \mu / V_{\mu 0}$, $c_v = 5R / (2\rho_0 V_{\mu 0}) = 650 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ (2)

sau altfel $\rho_0 = \mu p_0 / (RT_0)$, $c_v = 5p_0 / (2\rho_0 T_0)$; (3)

$c_p = \gamma c_v = 910 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ ($\gamma = 1,40$ pentru gaze *diatomice*)

sau $c_p = c_v + R / \mu = 7p_0 / (2\rho_0 T_0)$. (4)

3.18. Calculați căldurile specifice $c_{v,p}$ ale unui gaz, știind raportul lor $\gamma = 1,40$ și densitatea gazului în condiții normale $\rho_0 = 1,293 \text{ kg/m}^3$.

Rezolvare. $C_p - C_v = R$, $c_p - c_v = R / \mu$, (1)
 $c_p / c_v = C_p / C_v = \gamma$, $\rho = \mu p / (RT)$,

$c_v = R : [(\gamma - 1) \mu] = p : [(\gamma - 1) \rho T] = 720 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$, (2)

$c_p = \gamma R : [(\gamma - 1) \mu] = \gamma p : [(\gamma - 1) \rho T] = 1010 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$, (2)

3.19. Calculați căldura specifică izocoră a unui gaz diatomic cunoscând viteza pătratică medie a moleculelor sale $v_T = 600 \text{ m/s}$ la temperatura $t = 27^\circ\text{C}$.

Rezolvare. $v_T^2 = 3RT/\mu$, $C_v = 5R/2$, (1)

$c_v = C_v/\mu = 5R/(2\mu) = (5/2) v_T^2/(3T) = 1000 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$. (2)

3.20. Exprimați căldurile molare și specifice ale unui amestec de gaze ideale, cunoscând compoziția amestecului prin fracțiunile molare (sau volumice) r_i sau prin fracțiunile masice (în greutate) g_i . Stabiliți formulele de trecere între r_i și g_i .

Rezolvare. $Q = \nu C_v \Delta T = \sum \nu_i C_{vi} \Delta T \rightarrow$

$C_v = \sum (\nu_i/\nu) C_{vi} = \sum r_i C_{vi}$, $C_p = \sum r_i C_{pi}$. (1)

$Q = m c_v \Delta t = \sum m_i c_{vi} \Delta t \rightarrow$

$c_v = \sum (m_i/m) c_{vi} = \sum g_i c_{vi}$, $c_p = \sum g_i c_{pi}$, (2)

Cum $m_i = \nu_i \mu_i = r_i \nu \mu_i = g_i m$,

$\sum r_i = 1 = \sum g_i$, $\sum r_i \mu_i = m/\nu$, $\sum (g_i/\mu_i) = \nu/m$, (3)

rezultă $r_i = (g_i/\mu_i) : (\nu/m) = (g_i/\mu_i) : \sum (g_k/\mu_k)$, (4)

$g_i = r_i \mu_i : (m/\nu) = r_i \mu_i : \sum r_k \mu_k$. (5)

3.21. Un amestec de azot și hidrogen are densitatea $\rho = 0,30 \text{ kg}/\text{m}^3$ la temperatura $t = 47^\circ\text{C}$ și presiunea $p = 2,00 \text{ atm}$. Aflați concentrațiile moleculelor de azot (n_1) și de hidrogen (n_2)

Se dau constantele R și N_A .

Rezolvare. Cunoscuta formulă a presiunii se scrie:

$p = (n_1 + n_2)kT$, $k = R/N_A$. (1)

Pe de altă parte, dacă m_{01} , m_{02} sunt masele moleculelor de azot, respectiv hidrogen, atunci densitatea ρ , adică masa **unității de volum**, este, evident,

$\rho = n_1 m_{01} + n_2 m_{02} = n_1 \mu_1/N_A + n_2 \mu_2/N_A$. (2)

Din ecuațiile (1), (2) rezultă :

$n_1 = N_A(\rho RT - \mu_2 p) : [RT(\mu_1 - \mu_2)] = 3,5 \cdot 10^{24} \text{ m}^{-3}$, (3)

$n_2 = N_A(\rho RT - \mu_1 p) : [RT(\mu_2 - \mu_1)] = 4,2 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$. (4)

3.22. Într-un vas se află azot (1) și hidrogen (2). La o temperatură T azotul este complet disociat, iar hidrogenul nu, presiunea fiind p . La temperatura nT , $n = 3,0$, sunt disociate complet ambele gaze și presiunea este rp , $r = 4,0$. Aflați raportul maselor azotului și hidrogenului, precum și raportul cantităților (de substanță) (adică raportul numerelor de moli)

de azot și hidrogen, aflate inițial în vas, înainte de disocierea lor.

Rezolvare. Dacă m_1 este masa azotului, atunci $N_A m_1 / \mu_1$ este numărul moleculelor N_2 și prin disociere completă obținem $2 N_A m_1 / \mu_1$ atomi. La temperatura T și presiunea p ecuația de stare se scrie : $pV = (N_1 + N_2)kT = (2 N_A m_1 / \mu_1 + N_A m_2 / \mu_2)kT =$
 $= (2 m_1 / \mu_1 + m_2 / \mu_2) RT .$ (1)

Analog, la temperatura nT și presiunea rp avem :

$$rp \cdot V = (2 m_1 / \mu_1 + 2m_2 / \mu_2) R \cdot nT .$$
 (2)

Împărțind membru la membru cele două ecuații, obținem

$$r = 2n (m_1 / \mu_1 + m_2 / \mu_2) : (2 m_1 / \mu_1 + m_2 / \mu_2) .$$
 (3)

Împărțind numărătorul și numitorul fracției cu m_2 , obținem raportul:

$$m_1 / m_2 = (\mu_1 / \mu_2) (2n - r) / [2(r - n)] = 14 .$$
 (4)

Observăm că masa se măsoară cu **kilogramul**, iar **cantitatea de substanță** se măsoară cu **molul**. Atunci raportul inițial de moli va fi :

$$v_1 / v_2 = (m_1 / \mu_1) : (m_2 / \mu_2) =$$

$$= (m_1 / m_2) (\mu_2 / \mu_1) = (2n - r) / [2(r - n)] = 1,00 .$$
 (5)

3.23. Un vas cilindric, izolat adiabatic de exterior, este împărțit în două jumătăți cu ajutorul unui piston, de masă și grosime neglijabile, care se poate mișca etanș fără frecări . Inițial pistonul este blocat, într-un compartiment fiind $v = 1,00$ mol de gaz ideal diatomic, la temperatura $T = 300$ K, iar celălalt compartiment fiind vidat. Pistonul este deblocat și gazul se destinde. Apoi se împinge pistonul la loc acționând din exterior. Aflați : a) Variația energiei interne a gazului , b) Raportul în care se schimbă energia cinetică medie a moleculelor.

Rezolvare. a) Pistonul fiind imponderabil și vasul izolat adiabatic, avem de fapt o **destindere adiabatică, liberă, în vid a gazului ideal**, când temperatura gazului nu se schimbă (experiența lui *J. P. Joule* din 1843 cu privire la energia internă a unui gaz ideal).

Revenind înapoi la volumul inițial vom avea o comprimare adiabatică :

$$T_2 / T_1 = [V : (V/2)]^{\gamma-1} \rightarrow T_2 = T_1 \cdot 2^{\gamma-1} = 396 \text{ K} ,$$
 (1)

$$\gamma = C_p / C_v = c_p / c_v = 7/5 = 1,40 \text{ la gaze diatomice ;}$$

$$\Delta U = \nu C_v (T_2 - T_1) = \nu (5R/2) (T_2 - T_1) = 2,0 \text{ MJ} .$$
 (2)

$$b) \bar{\varepsilon} = 5kT/2 \rightarrow \bar{\varepsilon}_2 / \bar{\varepsilon}_1 = T_2 / T_1 = 2^{\gamma-1} = 1,32 .$$
 (3)

3.24. Exprimați căldurile specifice și molare ale unui gaz diatomic parțial disociat în atomi. Care este gradul de disociere al oxigenului dacă căldura sa specifică izobară a devenit $c_p = 1000 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$?

Rezolvare. Gradul de disociere α este raportul dintre numărul de molecule disociate și numărul total inițial de molecule sau altfel, este raportul dintre masa de gaz disociată și masa totală .

Prin disociere vom avea un amestec de gaz diatomic (nedisociat) și gaz monoatomic (format din atomii moleculelor disociate). Procentele de greutate (fracțiunile masice) ale compoziției amestecului vor fi :

$$g_1 = m_1 / m = \alpha , \quad g_2 = m_2 / m = (m - m_1) / m = 1 - \alpha . \quad (1)$$

Acum vom folosi rezultatele problemei 3.20 :

$$c_v = \sum g_i c_{vi} = \alpha \cdot 3R / (2A) + (1 - \alpha) \cdot 5R / (2\mu) , \quad \text{dar } A = \mu / 2 ,$$

$$c_v = \alpha \cdot 3R / \mu + (1 - \alpha) \cdot 5R / (2\mu) = (\alpha + 5)R / (2\mu) , \quad (2)$$

$$c_p = \sum g_i c_{pi} = \alpha \cdot 5R / (2A) + (1 - \alpha) \cdot 7R / (2\mu) = (3\alpha + 7)R / (2\mu) . \quad (3)$$

Să trecem la fracțiunile de volum : $r_i = (g_i / \mu_i) : \sum (g_k / \mu_k) ,$

$$r_1 = (\alpha / A) : [\alpha / A + (1 - \alpha) / \mu] = 2\alpha : (1 + \alpha) , \quad (4)$$

$$r_2 = [(1 - \alpha) / \mu] : [\alpha / A + (1 - \alpha) / \mu] = (1 - \alpha) / (1 + \alpha) , \quad (5)$$

$$C_v = \sum r_i C_{vi} = [2\alpha : (1 + \alpha)] 3R / 2 + [(1 - \alpha) / (1 + \alpha)] 5R / 2 =$$

$$= [(\alpha + 5) / (1 + \alpha)] R / 2 , \quad (6)$$

$$C_p = \sum r_i C_{pi} = [2\alpha : (1 + \alpha)] 5R / 2 + [(1 - \alpha) / (1 + \alpha)] 7R / 2 =$$

$$= [(3\alpha + 7) / (1 + \alpha)] R / 2 , \quad (7)$$

$$\gamma = C_p / C_v = c_p / c_v = (3\alpha + 7) / (\alpha + 5) . \quad (8)$$

Pentru oxigenul din problemă :

$$c_p = (3\alpha + 7)R / (2\mu) \rightarrow \alpha = [2\mu / (3R)] c_p - 7 / 3 = 23 \% . \quad (9)$$

3.25. Exprimați căldura specifică izocoră a unui gaz încălzit până la temperaturi foarte înalte, astfel încât gazul este complet ionizat. Aplicație la oxigen.

Rezolvare. Dintr-un atom cu Z electroni obținem un amestec format din $Z + 1$ particule : un nucleu și separat cei Z electroni. Dacă $m_o = A / N_A$ este masa atomului (A - masa molară) și m_e - masa electronului, atunci fracțiunile în greutate sunt :

$$g_1 = Zm_e / m_o = Zm_e / (A / N_A) \ll 1 , \quad (\text{deoarece } m_e \ll m_o) ,$$

$$g_2 = 1 - g_1 \approx 1 . \quad (1)$$

Aplicăm rezultatele de la problema 3.20, observând că masa molară a electronilor $\mu_e = m_e \cdot N_A$:

$$c_v = \sum g_i c_{vi} = [Zm_e : (A / N_A)] \cdot [3R : (2m_e N_A)] + 3R / (2A) = \\ = (Z + 1) 3R / (2A) = 7,0 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K}) \quad (2)$$

față de $c_v = 5R / (2 \mu) = 5R / (4A) = 650 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$, (3)

deci căldura specifică a crescut în raportul :

$$(3/2) (Z + 1) (R / A) : [5R / (4A)] = (6/5) (Z + 1) = 10,8 \text{ ori} . \quad (4)$$

3.26. Într-un vas de volum $V = 0,50 \text{ L}$ se află $m = 1,00 \text{ g}$ vapori de iod. La temperatura $t = 1000^\circ\text{C}$ presiunea din vas este $p = 93 \text{ kPa}$. Aflați gradul de disociere α a moleculelor de iod I_2 ($\mu = 254 \text{ g/mol}$) în atomi. Gradul de disociere α este raportul dintre numărul moleculelor disociate și numărul total inițial de molecule.

Rezolvare. Prin disociere vom avea un amestec de molecule diatomice I_2 și de atomi I . Fie N - numărul inițial total de molecule, atunci după disociere vom avea $2\alpha N$ atomi și $(1 - \alpha) N$ molecule în amestec :

$$pV = [2\alpha N + (1 - \alpha) N] kT = \quad (1)$$

$$= (1 + \alpha) NkT = (1 + \alpha) (m / \mu) RT, \quad \alpha = \mu pV / (mRT) - 1 = 12 \% . \quad (2)$$

3.27. Într-un vas la temperatura $T_1 = 300 \text{ K}$ se află $v_1 = 1,00 \text{ mol}$ Ne și $v_2 = 2,00 \text{ mol}$ H_2 , presiunea fiind $p_1 = 100 \text{ kPa}$. Când temperatura a crescut la $T_2 = 2400 \text{ K}$ presiunea a crescut la $p_2 = 880 \text{ kPa}$. Aflați gradul de disociere a moleculelor de hidrogen.

Rezolvare. Dacă inițial erau v_2 moli de hidrogen, prin disociere obținem $2\alpha v_2$ moli de atomi de hidrogen și $(1 - \alpha)v_2$ moli de molecule de hidrogen, deci $p_1 V = (v_1 + v_2) RT_1$,

$$p_2 V = [(v_1 + 2\alpha v_2 + (1 - \alpha)v_2) RT_2] . \quad (1)$$

Prin împărțirea ecuațiilor membru la membru, obținem :

$$p_2 / p_1 = (T_2 / T_1) [v_1 / v_2 + (1 + \alpha)] : [v_1 / v_2 + 1] , \quad (2)$$

$$\alpha = [p_2 T_1 / (p_1 T_2) - 1] [v_1 / v_2 + 1] = 0,15 = 15 \% . \quad (3)$$

3.28. O cantitate $v_1 = 1,00 \text{ mol}$ de anhidridă sulfurică SO_3 se află într-un vas la temperatura $T_1 = 1000 \text{ K}$, la care gradul de disociere este $\alpha_1 = 0,20$: $SO_3 \rightarrow SO_2 + (1/2) O_2$. Dacă în același vas, în prealabil vidat, introducem acum $v_2 = 0,40 \text{ mol}$ SO_3 , atunci pentru a obține aceeași presiune ca înainte temperatura trebuie să fie $T_2 = 2000 \text{ K}$. Aflați gradul de disociere în al doilea caz .

Rezolvare. Fie v_1' , v_2' numerele de moli finale în cele două cazuri, atunci, conform reacției de disociere din enunț (ținând seama de coeficienții **stoichiometrici**):

$$\begin{aligned} v_1' &= (3/2) \alpha_1 v_1 + (1 - \alpha_1) v_1 = (1 + 0,5 \alpha_1) v_1, \\ v_2' &= (1 + 0,5 \alpha_2) v_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Ecuția de stare în cele două cazuri :

$$\begin{aligned} pV &= v_1' RT_1 = (1 + 0,5 \alpha_1) v_1 RT_1, \\ pV &= v_2' RT_2 = (1 + 0,5 \alpha_2) v_2 RT_2. \end{aligned} \quad (2)$$

De aici obținem $(1 + 0,5 \alpha_1) v_1 T_1 = (1 + 0,5 \alpha_2) v_2 T_2 \rightarrow$

$$\alpha_2 = 2(1 + 0,5 \alpha_1) v_1 T_1 : (v_2 T_2) - 2 = 0,75. \quad (3)$$

3.29. Într-un vas de volum $V = 1,00$ L este păstrată o masă $m = 1,00$ g tritium ${}^3\text{T}_1$ radioactiv. După $t = 13$ ani, jumătate din tritium se transformă în heliu ${}^3\text{He}_2$. Aflați presiunea finală, temperatura fiind $t = 27^\circ\text{C}$.

Rezolvare. Ecuția procesului : $\text{T}_2 \rightarrow 2 \text{He}$. (1)

În starea inițială avem $v = m / \mu$ mol de tritium ($\mu = 0,006$ kg/mol).

În starea finală vom avea $v/2$ mol tritium plus $2 \cdot (v/2)$ mol de heliu, conform reacției (1).

$$\begin{aligned} pV &= (m / \mu) RT, \quad p'V = (v/2 + 2 \cdot v/2)RT = (3/2) (m / \mu) RT, \quad (2) \\ p' &= (3/2) (m / \mu) RT / V = 630 \text{ kPa}. \quad (3) \end{aligned}$$

3.30. Un vas izolat termic de exterior este împărțit printr-un perete subțire termoconductor în două compartimente $V_1 = 3,00$ L, $V_2 = 4,00$ L, conținând același gaz la presiunile $p_1 = 300$ kPa, respectiv $p_2 = 200$ kPa și temperaturile $t_1 = 27^\circ\text{C}$, $t_2 = 127^\circ\text{C}$. Aflați temperatura finală din compartimente după terminarea procesului de schimb de căldură prin perete, precum și presiunile finale.

Rezolvare. Căldura cedată de gazul dintr-un compartiment este preluată de celălalt :

$$v_1 C_V (T' - T_1) = v_2 C_V (T_2 - T'), \quad (1)$$

Dar $v_1 = p_1 V_1 / (RT_1)$, $v_2 = p_2 V_2 / (RT_2)$, (2)

$$(p_1 V_1 / T_1) (T' - T_1) = (p_2 V_2 / T_2) (T_2 - T'),$$

$$T' = (p_1 V_1 + p_2 V_2) : (p_1 V_1 / T_1 + p_2 V_2 / T_2) = 340 \text{ K} = 67^\circ\text{C}. \quad (3)$$

Gazele din compartimente suferă transformări izocore :

$$p_1' = p_1 T' / T_1 = 340 \text{ kPa}, \quad p_2' = p_2 T' / T_2 = 170 \text{ kPa} \quad (4)$$

3.31. Două vase de volum $V_1 = 1,00 \text{ L}$, respectiv $V_2 = 2,00 \text{ L}$, izolate termic de exterior, sunt legate printr-un mic tub cu robinet. Primul vas conține argon la presiunea $p_1 = 100 \text{ kPa}$ și temperatura $t_1 = 27^\circ\text{C}$, iar al doilea conține azot la presiunea $p_2 = 200 \text{ kPa}$ și $t_2 = 127^\circ\text{C}$. Ce temperatură și presiune se stabilesc în amestec după deschiderea robinetului ?

Rezolvare. Sistemul nu primește din exterior nici căldură, nici lucru mecanic, de aceea energia internă se conservă. La gaze ideale energia internă depinde numai de temperatură (legea lui Joule), prin urmare :

$$v_1 C_{V1} T_1 + v_2 C_{V2} T_2 = v_1 C_{V1} T' + v_2 C_{V2} T', \quad (1)$$

dar $v_1 = p_1 V_1 / (RT_1)$, $v_2 = p_2 V_2 / (RT_2)$, (2)

$$p_1 V_1 C_{V1} + p_2 V_2 C_{V2} = T' [(p_1 V_1 / T_1) C_{V1} + (p_2 V_2 / T_2) C_{V2}]. \quad (3)$$

Notând $C_{V2} / C_{V1} = \varepsilon$, obținem

$$T' = (p_1 V_1 + \varepsilon p_2 V_2) : (p_1 V_1 / T_1 + \varepsilon p_2 V_2 / T_2) = 383 \text{ K} = 110^\circ\text{C}. \quad (4)$$

Scriem acum conservarea numărului de moli :

$$p_1 V_1 / T_1 + p_2 V_2 / T_2 = p' (V_1 + V_2) / T', \quad (5)$$

$$p' = [T' / (V_1 + V_2)] (p_1 V_1 / T_1 + p_2 V_2 / T_2) = 170 \text{ kPa}. \quad (6)$$

3.32. În două vase legate printr-un mic tub cu robinet se află respectiv $v_1 = 1,00 \text{ mol}$ de gaz ideal având viteza pătratică medie a moleculelor $v_{T1} = 400 \text{ m/s}$ și $v_2 = 2,00 \text{ mol}$ din același gaz având $v_{T2} = 500 \text{ m/s}$. Care va fi viteza pătratică medie în amestecul gazos care se obține după deschiderea robinetului și stabilirea echilibrului termic ?

Rezolvare. Considerând sistemul izolat termic de exterior în procesul amestecării, scriem conservarea energiei interne:

$$v_1 C_V T_1 + v_2 C_V T_2 = v_1 C_V T' + v_2 C_V T',$$

$$T' = (v_1 T_1 + v_2 T_2) / (v_1 + v_2), \quad (1)$$

dar $v_T^2 = 3RT / \mu$, $T = \mu v_T^2 / (3R)$, (2)

atunci obținem $v_T = \sqrt{\frac{3RT'}{\mu}} = \sqrt{\frac{v_1 v_{T1}^2 + v_2 v_{T2}^2}{v_1 + v_2}} = 470 \text{ m/s}. \quad (3)$

3.33. Două vase identice de volum $V = 10 \text{ L}$ fiecare au un perete comun termoizolant în care se află un orificiu închis cu o membrană semipermeabilă de paladiu. În primul vas sunt $m_1 = 20 \text{ g}$ Ar la temperatura $T_1 = 300 \text{ K}$ menținută constantă, iar în al doilea $m_2 = 2,0 \text{ g}$ H_2 la temperatura $T_2 = 600 \text{ K}$, menținută

constantă. Știind că prin membrana de paladiu poate difuza hidrogen, aflați presiunile finale din vase.

Rezolvare. La orificii *mari* ($>$ drumul liber mediu al moleculelor) se stabilește echilibru în vase prin egalarea *presiunilor*. În cazul orificiilor *foarte mici* ($<$ drumul liber mediu al moleculelor) echilibrul gazelor de o parte și de alta se stabilește când *fluxurile* de molecule incidente pe orificiu într-o parte și alta se egalează. Fluxul de molecule reprezintă numărul de molecule incidente în *unitatea de timp* pe o anumită suprafață.

Se demonstrează în teoria cinetică următoarea formulă pentru flux ("curent" de molecule) :

$$\Phi = (1/4) n \bar{v} S, \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}, \quad (1)$$

unde n este concentrația moleculelor (numărul moleculelor din unitatea de volum), iar \bar{v} viteza *medie* a moleculelor (a nu se confunda cu viteza *pătratică* medie sau viteza *termică*).

Pentru hidrogen avem atunci condiția de echilibru :

$$(1/4) n_2' \bar{v}'_2 S = (1/4) n_2'' \bar{v}''_2 S \text{ sau } n_2' \sqrt{T_1} = n_2'' \sqrt{T_2}, \quad (2)$$

dar $n = N/V = \nu N_A/V$, atunci (2) devine

$$\nu_2' \sqrt{T_1} = \nu_2'' \sqrt{T_2}, \text{ dar } \nu_2' + \nu_2'' = \nu_2 = m_2/\mu_2, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \nu_2' &= \nu_2 \sqrt{T_2} : [\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}] = (m_2/\mu_2) \sqrt{T_2} : [\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}] = \\ &= 0,60 \text{ mol}, \quad \nu_2'' = 0,40 \text{ mol}. \end{aligned} \quad (4)$$

Presiunile din vase se obțin ușor din *ecuația de stare* :

$$\begin{aligned} p_1' &= (m_1/\mu_1 + \nu_2')RT_1/V = 270 \text{ kPa}, \\ p_2'' &= \nu_2''RT_2/V = 200 \text{ kPa}. \end{aligned} \quad (5)$$

Observăm că din (2) și din $p = nkT$ rezultă că presiunile parțiale ale hidrogenului de o parte și de alta a membranei se egalează numai dacă temperaturile sunt egale, altfel avem

$$[p_2'/(kT_1)] \sqrt{T_1} = [p_2''/(kT_2)] \sqrt{T_2} \rightarrow p'/p'' = \sqrt{T_1/T_2}. \quad (6)$$

3.34. Într-un cilindru orizontal lung se află $\nu = 1,00$ mol de gaz ideal diatomic la temperatura $T_0 = 300$ K, închis între două pistoane de masă $m = 1,00$ kg fiecare, care se pot mișca etanș fără frecări. În exterior presiunea este neglijabilă și sistemul este termoizolat. În momentul inițial se imprimă pistoanelor vitezele $\nu_1 = 6,0$ m/s, $\nu_2 = 4,0$ m/s unul spre celălalt. Aflați temperatura maximă pe care o va atinge gazul.

Rezolvare. Pierderea *maximă* de energie cinetică, care se transformă în energia internă a gazului, are loc în ciocirea *plastică* (total inelastică). Din teoria ciocnirilor avem :

$$-\Delta E_c = (1/2) m_r v_r^2 = (1/2) [m m / (m + m)][v_1 - (-v_2)]^2 = \\ = (1/4) m(v_1 + v_2)^2 = \Delta U = \nu C_V \Delta T, \quad (1)$$

$$T_{\max} = T_0 + [m / (4\nu C_V)] (v_1 + v_2)^2 = 300 \text{ K} + 1,2 \text{ K}, \quad (2)$$

unde $C_V = 5R/2$ pentru gaze *diatomice*. Creșterea de temperatură este modestă .

3.35. Un satelit cu aria secțiunii transversale $S = 1,00 \text{ m}^2$ se mișcă cu prima viteză cosmică pe o orbită circulară unde presiunea $p = 137 \text{ } \mu\text{Pa}$ și temperatura $T = 1226 \text{ K}$ (altitudine $h \approx \approx 200 \text{ km}$). Aflați numărul de ciocniri pe secundă între satelit și moleculele de aer.

Rezolvare. Numărul de ciocniri suferite de satelit, pe unitatea de timp, este egal cu numărul moleculelor interceptate de satelit în drumul său, în unitatea de timp, deci pe distanța $v \cdot 1 = v$, deci cu numărul moleculelor cuprinse într-un cilindru de lungime v și bază S :

$$z = v \cdot S \cdot n, \quad p = nkT, \quad (1)$$

unde n este concentrația moleculelor. Dar prima viteză cosmică este $v = \sqrt{gR_p}$, unde g este accelerația gravitațională și R_p - raza Pământului ,

$$z = \sqrt{gR_p} [p / (kT)] S \approx 6 \cdot 10^{19} \text{ s}^{-1}. \quad (2)$$

*** 3.36. Calculați viteza cea mai probabilă (de maximă probabilitate) v_p și energia cinetică de translație cea mai probabilă (de maximă probabilitate) ε_p a moleculelor unui gaz perfect.**

Rezolvare. Viteza cea mai *probabilă* sau de maximă probabilitate corespunde maximului *funcției de distribuție* $f(v)$ care dă densitatea de probabilitate. Condiția de maxim este anularea derivatei. Putem deriva mai simplu în raport cu v^2 :

$$df(v) / d(v^2) = 4\pi[m_0 / (2\pi kT)]^{3/2} e^{-m_0 v^2 / (2kT)} [1 - m_0 v^2 / (2kT)] = 0,$$

de unde
$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}. \quad (1)$$

Acestei viteze îi corespunde maximul funcției de distribuție :

$$f_{\max} = 4 : (e\sqrt{\pi} \cdot v_p) = 0,83 / v_p. \quad (2)$$

De aici se vede că punctele de maxim ("vârfurile") curbelor de distribuție pentru diferite temperaturi se situează pe o iperbolă echilaterală :

$$f = 4 : (e\sqrt{\pi} \cdot v) = 0,83 / v, \quad (3)$$

deci maximele f_{\max} , adică vârfurile curbelor de distribuție, scad și se depărtează spre viteze mai mari odată cu creșterea temperaturii.

Pentru a afla energia cinetică de translație $\varepsilon = m_0 v^2 / 2$ cea mai probabilă sau de maximă probabilitate, trebuie să deducem funcția de distribuție sau densitatea de probabilitate după energii cinetice $f(\varepsilon)$. Plecăm de la probabilitatea ca molecula să aibă viteza în intervalul $(v, v + dv)$ sau energia cinetică în intervalul corespunzător $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$:

$$dP = f(v)dv = f(\varepsilon)d\varepsilon. \quad (4)$$

$$\text{dar} \quad d\varepsilon = d(m_0 v^2 / 2) = m_0 v dv = \sqrt{2m_0 \varepsilon} \cdot dv, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{deci} \quad f(\varepsilon)d\varepsilon &= f(v)dv = f(v) \cdot d\varepsilon : \sqrt{2m_0 \varepsilon} = \\ &= 4\pi (2\varepsilon / m_0) [m_0 / (2\pi kT)]^{3/2} e^{-\varepsilon / (kT)} \cdot d\varepsilon : \sqrt{2m_0 \varepsilon}, \end{aligned}$$

de unde funcția de distribuție după energii cinetice :

$$f(\varepsilon) = (2/\sqrt{\pi}) [1 / (kT)^{3/2}] e^{-\varepsilon / (kT)} \sqrt{\varepsilon}. \quad (6)$$

Maximul se obține prin anularea derivatei :

$$\begin{aligned} f'(\varepsilon) &= (2/\sqrt{\pi}) [1 / (kT)^{3/2}] e^{-\varepsilon / (kT)} [-\sqrt{\varepsilon} / (kT) + 1 / (2\sqrt{\varepsilon})] = 0, \\ \text{de unde} \quad \varepsilon_p &= kT / 2 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{și îi corespunde} \quad f_{\max} = (1 / \sqrt{2\pi e}) (1 / \varepsilon_p) = 0,24 / \varepsilon_p. \quad (8)$$

Observăm că energia cinetică cea mai probabilă ε_p (7) **nu** corespunde vitezei celei mai probabile, adică

$$\varepsilon_p = kT / 2 \neq m_0 v_p^2 / 2 = kT. \quad (9)$$

(* *) 3.37. La ce temperatură energia cinetică medie a atomilor de heliu este suficientă pentru a învinge atracția gravitațională terestră și a părăsi atmosfera ?

Rezolvare. Conform teoremei variației energiei cinetice, energia cinetică a moleculei va fi cheltuită pentru a efectua lucru mecanic împotriva forței de atracție gravitațională, adică pentru creșterea energiei potențiale :

$$dE_p = -dL = -\vec{F} d\vec{r} = -F dr = (\gamma m_0 M / r^2) dr,$$

$$\Delta E_p = \int dE_p = - \int dL = -L = \int_{R_p}^{\infty} \gamma m_0 M \frac{dr}{r^2}$$

$$= -\gamma m_o M \frac{1}{r} \Big|_{R_p}^{\infty} = \gamma m_o M \frac{1}{R_p}, \quad (1)$$

unde M este masa și R_p - raza Pământului, m_o - masa moleculei (atomului de heliu). Dar accelerația gravitațională la nivelul mării :

$$g_o = \gamma M / R_p^2, \quad (2)$$

atunci
$$\Delta E_p = -L = m_o g_o R_p \quad (3)$$

și condiția cerută : $(1/2) m_o \overline{v^2} = (3/2) kT \geq \Delta E_p = m_o g_o R_p$, (4)

de unde $T \geq 2 m_o g_o R_p / (3k) = 2 \mu g_o R_p / (3R) = 20 \text{ kK}$, (5)

unde $\mu = m_o N_A$ este masa molară a heliului. Se vede că moleculele ușoare pot părăsi mai ușor atmosfera terestră.

De altfel se cunoaște energia potențială de interacție gravitațională între două sfere omogene sau corpuri punctiforme:

$$E_p = -\gamma m_1 m_2 / r. \quad (6)$$

Atunci din conservarea energiei cinetice și potențiale, $E_c + E_p = \text{const}$, rezultă imediat :

$$\Delta E_c = 0 - \overline{\varepsilon} = -\Delta E_p = -[0 - (-\gamma m_o M / R_p)] ,$$

$$\overline{\varepsilon} = 3kT / 2 = \gamma m_o M / R_p = m_o g_o R_p .$$

*** * 3.38. Calculați procentul de molecule din atmosferă care au o energie potențială gravitațională mai mare decât energia lor cinetică medie de translație , considerând că temperatura și accelerația gravitațională sunt constante.**

Rezolvare. Concentrația moleculelor în funcție de altitudine

este dată de formula :
$$n(z) = n_o e^{-\mu g z / (RT)} . \quad (1)$$

Energia cinetică medie de translație a moleculelor :

$$(1/2) m_o \overline{v^2} = (3/2) kT . \quad (2)$$

Condiția cerută : $m_o g h \geq (1/2) m_o \overline{v^2} = (3/2) kT$, (3)

$$h_{\min} = 3kT / (2m_o g) = 3RT / (2\mu g) . \quad (4)$$

Să calculăm acum raportul (procentajul) cerut. Luăm o coloană verticală (infinită) de secțiune oarecare S . Moleculele care verifică condiția cerută (4) sunt situate la $z \geq h_{\min}$. Alegem *elementul* de volum dV sub forma unei pătri orizontale *infinit de subțiri*, situate la înălțimea z , deci de grosime dz și volum $dV = S dz$. În acest element de volum sunt $dN = n(z) dV$ molecule, unde $n(z)$ este dat de (1). Prin urmare, raportul cerut este

$$f = \int_{h_{\min}}^{\infty} n(z) dV : \int_0^{\infty} n(z) dV = \int_{h_{\min}}^{\infty} n_0 e^{-\mu g z / (RT)} S dz : \int_0^{\infty} n_0 e^{-\mu g z / (RT)} S dz = e^{-\mu g z / (RT)} \Big|_{h_{\min}}^{\infty} : e^{-\mu g z / (RT)} \Big|_0^{\infty} = e^{-\mu g h_{\min} / (RT)} = e^{-3/2} = 22,3 \% . \quad (5)$$

**** 3.39. Calculați viteza medie a moleculelor și viteza pătratică medie cu ajutorul distribuției maxwelliene .**

Rezolvare. Dacă viteza ar lua valori discrete v_1, v_2, \dots , atunci viteza medie ar fi evident:

$$\bar{v} = (\sum v_i n_i) : n = \sum v_i P_i, \quad (n_i / n = P_i), \quad (1)$$

unde n_i este numărul moleculelor care au viteza v_i , iar n este numărul total de molecule, $n_i / n = P_i$ este evident *probabilitatea* ca o moleculă să aibă viteza v_i . Dacă viteza ia valori în mod *continuu* în intervalul $(0, \infty)$ (așa cum este practic cazul într-un gaz, datorită numărului imens de molecule), suma din (1) trece într-o integrală :

$$\bar{v} = \int \frac{v dn}{n} = \int v dP = \int_0^{\infty} v f(v) dv, \quad (2)$$

unde $f(v)$ este funcția de distribuție sau densitatea de probabilitate,

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v \cdot 4\pi v^2 \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m_0 v^2 / (2kT)} dv. \quad (3)$$

Să calculăm integrala ($\alpha > 0$):

$$I_1 = \int_0^{\infty} x e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} \frac{e^{-\alpha x^2}}{-\alpha} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2\alpha}. \quad (4)$$

Prin derivarea integralei (4) în raport cu parametrul α (v. condițiile care trebuie îndeplinite pentru o asemenea derivare):

$$\frac{d}{d\alpha} \int_0^{\infty} x e^{-\alpha x^2} dx = \int_0^{\infty} -x^3 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{2\alpha} \right) = -\frac{1}{2\alpha^2},$$

de unde

$$I_3 = \int_0^{\infty} x^3 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha^2}. \quad (5)$$

De altfel, integrala (5) se poate calcula și direct, prin părți :

$$I_3 = \int_0^{\infty} x^3 e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{1}{2\alpha} \int_0^{\infty} x^2 d e^{-\alpha x^2} = -\frac{1}{2\alpha} x^2 e^{-\alpha x^2} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} 2x dx = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} x e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{\alpha} I_1 = \frac{1}{2\alpha^2},$$

unde ultima integrală I_1 am calculat-o mai înainte în (4).

Revenind la integrala noastră (3) avem

$$\bar{v} = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \frac{1}{2m_0^2/(2kT)^2} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \quad (6)$$

Să calculăm acum $\overline{v^2}$. Aplicând același raționament ca pentru \bar{v} , avem:

$$\overline{v^2} = \int_0^\infty v^2 f(v) dv = \int_0^\infty v^2 \cdot 4\pi v^2 \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m_0 v^2/(2kT)} dv \quad (7)$$

Vom pleca de la *integrala lui Poisson* ($\alpha > 0$):

$$I_0 = \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad (8)$$

pe care o derivăm succesiv de două ori în raport cu parametrul α :

$$\frac{d}{d\alpha} I_0 = \int_{-\infty}^\infty -x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{d}{d\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \sqrt{\pi} \left(-\frac{1}{2} \right) \alpha^{-3/2} = -\frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad (9)$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^\infty x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\pi} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{3}{2} \right) \alpha^{-5/2} = \frac{3}{4\alpha^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (10)$$

De altfel, aceste integrale se pot obține integrând prin părți și folosind integrala lui *Poisson* I_0 (8), și anume:

$$I_2 = \int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{1}{2\alpha} \int_{-\infty}^\infty x de^{-\alpha x^2} = -\frac{1}{2\alpha} x e^{-\alpha x^2} \Big|_{-\infty}^\infty +$$

$$+ \frac{1}{2\alpha} \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha} I_0 = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^\infty x^4 e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{1}{2\alpha} \int_{-\infty}^\infty x^3 de^{-\alpha x^2} = -\frac{1}{2\alpha} x^3 e^{-\alpha x^2} \Big|_{-\infty}^\infty +$$

$$+ \frac{1}{2\alpha} \int_{-\infty}^\infty 3x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{3}{2\alpha} I_2 = \frac{3}{4\alpha^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

De altfel, se pot obține ușor formulele generale pentru I_{2n+1} și I_{2n} (așa numitele *integrale ale lui Poisson*):

$$I_{2n+1} = \int_0^\infty x^{2n+1} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{n!}{2\alpha^{n+1}}, \quad (11)$$

$$I_{2n} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{(2\alpha)^n} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad (12)$$

unde *dublul factorial* înseamnă :

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1). \quad (13)$$

Revenind la integrala noastră (7) și observând că limitele de integrare sunt de la 0 la ∞ , deci integrala valorează exact jumătate din (10) :

$$\overline{v^2} = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4m_0^2/(2kT)^2} \sqrt{\frac{\pi}{m_0/(2kT)}} = \frac{3kT}{m_0},$$

$$\sqrt{\overline{v^2}} = v_T = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}, \quad (14)$$

am regăsit rezultatul cunoscut.

Ținând seama de *simetria sferică* avem imediat :

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3 \overline{v_x^2} = 3 \overline{v_y^2} = 3 \overline{v_z^2},$$

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}. \quad (15)$$

Propunem cititorului ca, folosind integralele lui **Poisson** (11), (12), să stabilească următoarele medii :

$$\overline{v^{2n+1}} = \frac{2(n+1)!}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2kT}{m_0} \right)^{n+1/2} \quad (16)$$

$$\overline{v^{2n}} = (2n+1)!! \left(\frac{kT}{m_0} \right)^n. \quad (17)$$

**** 3.40. Știind că numărul de molecule care lovesc unitatea de arie în unitatea de timp și au modulul vitezei în intervalul $(v, v + dv)$ este dat de formula (18) de la Breviar : $dN_0(v) = (1/4) n f(v) v dv$, calculați energia cinetică de translație E_0 a moleculelor unui gaz perfect, care lovesc unitatea de arie a peretelui în unitatea de timp.**

Rezolvare. Fiecare din cele $dN_0(v)$ molecule duce cu sine o energie cinetică $m_0 v^2/2$, deci energia cinetică totală a acestor molecule este

$$dE_0(v) = dN_0(v) \cdot m_0 v^2/2 = (1/8) n m_0 v^3 f(v) dv. \quad (1)$$

Însumând (integrând) după viteze :

$$E_0 = \int dE_0(v) = \frac{1}{8} nm_0 \int_0^\infty v^3 f(v) dv = \frac{1}{8} nm_0 \overline{v^3} = \frac{1}{8} \rho \overline{v^3},$$

unde $nm_0 = \rho$ este densitatea. Propunem cititorului să calculeze singur $\overline{v^3}$; noi vom lua rezultatul de la problema precedentă 3.39:

$$\overline{v^3} = 8 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{kT}{m_0} \right)^{3/2}, \quad (3)$$

astfel încât (2) devine :

$$E_0 = \frac{1}{8} nm_0 \overline{v^3} = nkT \sqrt{\frac{2kT}{\pi m_0}} = \frac{1}{2} \rho \overline{v}. \quad (4)$$

**** 3.41. Într-un vas de volum $V = 1,00 \text{ L}$, complet vidat, se deschide un mic orificiu de secțiune $S = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mm}^2$ într-un perete subțire. Aflați cum variază în timp presiunea p din vas și după cât timp τ presiunea aerului din vas devine egală cu o fracțiune $q = 0,50$ din presiunea atmosferică. Deși procesul nu este quasistatic, presupuneți totuși că se desfășoară suficient de lent, astfel încât se poate vorbi de presiunea și temperatura aerului din vas. Considerați temperatura aerului din vas egală cu temperatura exterioară $T = 300 \text{ K}$. Numărul de molecule care lovesc unitatea de arie în unitatea de timp este $N_0 = (1/4)n \overline{v}$.**

Rezolvare. Numărul moleculelor de aer care intră în vas prin orificiul S , la un moment dat t , în intervalul de timp dt , este

$$\frac{1}{4} n_e \overline{v} S dt = \frac{1}{4} \frac{H - p}{kT} \overline{v} S dt, \quad (H - \text{presiunea atmosferică}). \quad (1)$$

În același moment t și în același interval de timp dt iese afară din vas numărul de molecule :

$$\frac{1}{4} n_i \overline{v} S dt = \frac{1}{4} \frac{p}{kT} \overline{v} S dt, \quad (p - \text{presiunea din vas}). \quad (2)$$

Creșterea numărului de molecule din vas va fi diferența :

$$dN = \frac{1}{4} \frac{H - p}{kT} \overline{v} S dt. \quad (3)$$

Dar $pV = NkT$, $dp = d(NkT/V) = (kT/V) dN$, (4)

$$dp = \frac{(H - p)}{4V} \overline{v} S dt. \quad (5)$$

Separăm variabilele și integram :

$$\frac{dp}{H-p} = \frac{S}{4V} \bar{v} dt, \quad \int \frac{dp}{H-p} = -\ln(H-p) =$$

$$= \int \frac{S}{4V} \bar{v} dt = \frac{S}{4V} \bar{v} t + C,$$

unde constanta de integrare C se determină din *condiția inițială* : la $t = 0$ avem $p = 0$, deci $-\ln H = C$,

$$-\ln \frac{H-p}{H} = \frac{S}{4V} \bar{v} t, \quad p = H \left(1 - e^{-S\bar{v}t/(4V)} \right). \quad (6)$$

Se poate integra și *definit* (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^p \frac{dp}{H-p} = -\ln \frac{H-p}{H} = \int_0^t \frac{S}{4V} \bar{v} dt = \frac{S}{4V} \bar{v} t.$$

Punem condiția ca presiunea să fie $p = qH$ și găsim timpul corespunzător :

$$-\ln \frac{H-qH}{H} = \ln \frac{1}{1-q} = \frac{S}{4V} \bar{v} \tau,$$

$$\tau = \frac{4V}{S\bar{v}} \ln \frac{1}{1-q} = 14 \text{ min.} \quad (7)$$

* * *

4.FENOMENE SUPERFICIALE LA LICHIDE

4.1. Tensiunea superficială

4.1.1. Un chibrit cu lungimea $\ell = 4,0$ cm plutește pe suprafața apei ($t = 20^\circ\text{C}$) . Dacă de o parte a chibritului picurăm o soluție de săpun, chibritul se pune în mișcare. Încontro și sub acțiunea cărei forțe ? ($\sigma_{\text{apă}} = 73$ mN/m , $\sigma_{\text{săp.}} = 43$ mN/m).

Rezolvare. De o parte și de alta chibritul este în contact cu pelicula superficială de lichid care are tendința de a-și restrânge aria, deci va fi supus la o forță de ordinul $\sim \sigma \ell$. Rezultanta va fi spre apa pură : $F \sim (\sigma_{\text{apă}} - \sigma_{\text{săp.}}) \ell = 1,2$ mN .

4.1.2. Un ac de oțel uns cu grăsime (apa nu-l udă deloc) se așează pe suprafața apei. Pentru ce diametre acul se menține pe suprafața apei ?

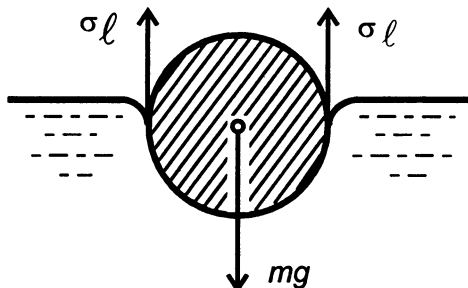


Fig.4.1.2

Rezolvare. Neglijând forța arhimedică față de forțele de tensiune superficială, scriem condiția de plutire :

$$mg \sim 2 \sigma \ell \quad \text{sau} \quad \rho (\pi D^2 / 4) \cdot \ell g = 2 \sigma \ell , \quad (1)$$

$$D = \sqrt{\frac{8\sigma}{\pi\rho g}} = 1,6 \text{ mm} . \quad (2)$$

4.1.3. Evaluați cu câte grade se încălzește o picătură de mercur, obținută prin fuziunea a $N = 1000$ picături de rază $r = 1,00$ mm fiecare. Dar dacă numărul picăturilor tinde la infinit?

Rezolvare. Ținând seama că volumul picăturii rezultate este egal cu de N ori volumul unei picături componente, putem afla raza picăturii rezultate : $4\pi R^3/3 = N \cdot 4\pi r^3/3 \rightarrow R = r \sqrt[3]{N}$. (1)

Vom ține seama de diferența de energie superficială care trece în energia internă sub "formă de căldură", deci la creșterea temperaturii :

$$\Delta E = N \cdot 4\pi r^2 \cdot \sigma - 4\pi R^2 \cdot \sigma = mc\Delta t , \quad (2)$$

$$4\pi\sigma \left(Nr^2 - r^2 \sqrt[3]{N^2} \right) = \rho \cdot (4\pi R^3/3) \cdot c\Delta t = \rho \cdot N(4\pi r^3/3) \cdot c\Delta t , \quad (3)$$

$$\Delta t = 3\sigma(N - \sqrt[3]{N^2}) : (Nr\rho c) = 7,2 \cdot 10^{-4} \text{ K (neglijabil)} ; \quad (4)$$

$$\Delta t = [3\sigma / (r\rho c)] (1 - 1 : \sqrt[3]{N}) \rightarrow 3\sigma / (r\rho c) = 8,0 \cdot 10^{-4} \text{ K} . \quad (5)$$

$$N \rightarrow \infty$$

4.1.4. Ce lucru mecanic trebuie efectuat pentru a diviza o picătură sferică de mercur de rază $R = 3,0$ mm în $N = 8$ picături identice?

Rezolvare. Lucrul mecanic (izoterm) este egal cu diferența de energie superficială a picăturilor :

$$L = N \cdot 4\pi r^2 \cdot \sigma - 4\pi R^2 \cdot \sigma , \quad (1)$$

dar din egalitatea volumelor avem :

$$(4\pi/3)R^3 = N \cdot (4\pi/3)r^3 \rightarrow r = R : \sqrt[3]{N} , \quad (2)$$

$$L = 4\pi\sigma(NR^2 / \sqrt[3]{N^2} - R^2) = 4\pi R^2\sigma(\sqrt[3]{N} - 1) = 56,5 \mu\text{J} . \quad (3)$$

4.1.5. Ce lucru mecanic trebuie efectuat (izoterm) împotriva forțelor de tensiune superficială pentru a mări de $N = 8,0$ ori volumul unei bule de săpun de rază $R = 10$ mm ?

Rezolvare. Lucrul mecanic este necesar pentru a mări energia superficială a bulei de săpun. Observăm că pelicula de săpun este mărginită de o parte și de alta (dinspre interior și dinspre exterior) de stratul superficial al soluției de apă și săpun, deci trebuie mărită aria ambelor păături superficiale :

$$L = 2 \cdot \sigma [4\pi R'^2 - 4\pi R^2] , \quad (1)$$

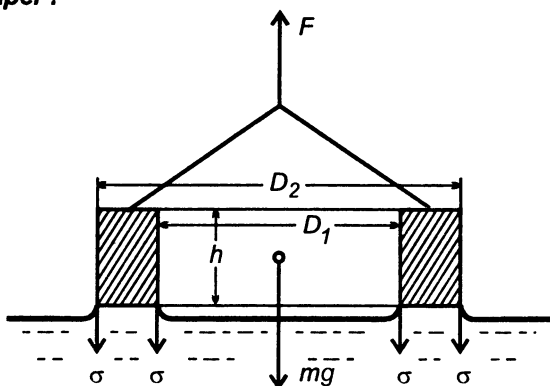
dar $(4\pi/3)R'^3 = N \cdot (4\pi/3)R^3 \rightarrow R' = R \sqrt[3]{N} , \quad (2)$

$$L = 2 \sigma \cdot 4\pi R^2 (\sqrt[3]{N^2} - 1) = 0,32 \text{ mJ} .$$

4.1.6. Ce forță trebuie aplicată unui inel cilindric orizontal, de înălțime $h = 10$ mm, de diametru interior $D_1 = 50$ mm și exte-

rior $D_2 = 52 \text{ mm}$, care plutește pe apă, pentru a-l desprinde de suprafața apei ?

Fig.4.1.6



Rezolvare. Forța F trebuie să învingă atât greutatea inelului, cât și forțele de tensiune superficială, ca în figură. Ținem seama de cele două contururi (cel interior și cel exterior) ale peliculei superficiale de lichid, deci $F = mg + \sigma \cdot \pi D_1 + \sigma \cdot \pi D_2 =$

$$= \rho h (\pi/4) (D_2^2 - D_1^2) g + \sigma \pi (D_1 + D_2) = 40,0 \text{ mN} + 23,5 \text{ mN}.$$

4.1.7. Un inel, cu diametrul interior $D_1 = 25 \text{ mm}$ și exterior $D_2 = 26 \text{ mm}$, este suspendat de un resort cu constanta elastică $k = 1,00 \text{ N/m}$ și se atinge de suprafața unui lichid. Coborând vasul cu lichid, inelul se desprinde când resortul s-a lungit cu $x = 5,3 \text{ mm}$. Aflați coeficientul de tensiune superficială al lichidului .

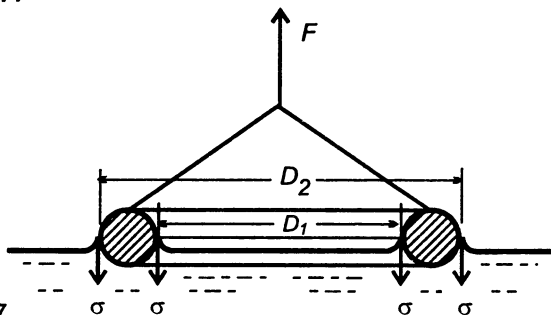


Fig.4.1.7

Rezolvare. Greutatea inelului este echilibrată prin forța elastică dată de deformarea (alungirea) inițială a resortului de care

este suspendat inelul. Prin urmare, forța elastică datorită alungirii suplimentare x trebuie să învingă forțele de tensiune superficială. Să nu uităm că sunt **două** contururi circulare, cel interior și cel exterior, prin care inelul este în contact cu lichidul, deci :

$$kx = \sigma \pi D_1 + \sigma \pi D_2, \quad \sigma = kx : [\pi(D_1 + D_2)] = 33 \text{ mN/m}.$$

4.1.8. Cadrul din figură este acoperit de o peliculă din apă cu săpun ($\sigma = 45 \text{ mN/m}$) și ținut vertical. a) Ce diametru trebuie să aibă tija mobilă CD din cupru pentru a sta în echilibru ?

b) Ce lungime are tija dacă pentru a o deplasa cu $d = 10 \text{ mm}$ trebuie efectuat un lucru mecanic $L = 45 \mu\text{J}$?

Rezolvare. a) Pelicula de lichid ABCD este mărginită de ambele părți (fețe) de stratul superficial care aderă de tija CD, deci rezultanta forțelor de tensiune superficială este $2 \cdot \sigma \ell$ care trebuie să echilibreze greutatea mg a tijeii. Prin urmare,

$$2 \sigma \ell = mg = \rho (\pi D^2 / 4) \ell g, \quad (1)$$

$$D = 2 \sqrt{2\sigma / (\pi \rho g)} = 1,2 \text{ mm}. \quad (2)$$

b) Lucrul mecanic se face împotriva forțelor de tensiune superficială : $L = 2 \sigma \ell \cdot d$, $\ell = L : (2 \sigma d) = 5,0 \text{ cm}$. (3)

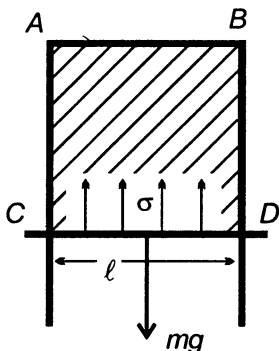


Fig.4.1.8

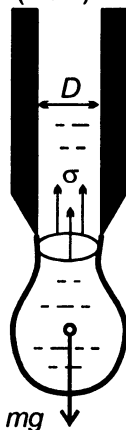


Fig.4.1.9

4.1.9. Dintr-un tub capilar de diametru interior $D = 2,0 \text{ mm}$ cad picături de alcool. Știind masa unei picături $m = 14,3 \text{ mg}$, aflați coeficientul de tensiune superficială al alcoolului. Dacă prin același capilar picură $N_a = 40$ picături de apă, ele cântăresc în total $m_a = 1,90 \text{ g}$. Aflați coeficientul de tensiune superficială al apei.

Rezolvare. În momentul desprinderii picăturii, greutatea acesteia mg învinge rezultanta forțelor de tensiune superficială :

$$\sigma \cdot 2\pi r = \sigma \pi D = mg \rightarrow \sigma = mg / (\pi D) = 22,3 \text{ mN/m} . \quad (1)$$

Analog pentru apă : $\sigma_a = (m_a / N_a)g : (\pi D) = 74 \text{ mN/m} . \quad (2)$

4.1.10. Prin topirea capătului inferior al unei sârme (verticale) de plumb, de diametru $D = 1,0 \text{ mm}$, s-au format $N = 20$ picături de plumb și sârma s-a scurtat cu $\ell = 34 \text{ cm}$. Aflați coeficientul de tensiune superficială al plumbului.

Rezolvare. Analog raționamentului de la problema precedentă 4.1.9, greutatea unei picături în momentul desprinderii învinge rezultanta forțelor de tensiune superficială :

$$mg = \sigma \pi D , \quad \text{dar} \quad \rho \ell \pi D^2 / 4 = Nm , \quad (1)$$

$$\sigma = mg / (\pi D) = \rho \ell \pi D^2 g : (4\pi DN) = \rho \ell D g : (4N) = 0,47 \text{ N/m} . \quad (2)$$

4.1.11. Dintr-un tub vertical de rază interioară $r=1,0 \text{ mm}$ picură apă. Considerând picăturile sferice și cunoscând coeficientul de tensiune superficială al apei, aflați raza unei picături .

Rezolvare. Ca în problema 4.1.9, în momentul desprinderii picăturii greutatea sa învinge rezultanta forțelor de tensiune superficială :

$$mg = \sigma \cdot 2\pi r , \quad \rho(4\pi/3)R^3 g = \sigma \cdot 2\pi r , \quad (1)$$

$$R = \sqrt[3]{3\sigma r / (2\rho g)} = 2,2 \text{ mm} . \quad (2)$$

4.1.12. Cât cântărește o picătură de apă , la 20°C , dacă ea picură dintr-un capilar de diametru $d = 1,20 \text{ mm}$?

Rezolvare. Conform problemei precedente 4.1.11, în momentul desprinderii :

$$mg = \sigma \cdot \pi d \rightarrow m = \pi \sigma d / g = 28 \text{ mg} .$$

4.1.13. Apa picură printr-un tub de diametru interior $D = 3,0 \text{ mm}$. Când temperatura apei a scăzut de la $t_1 \sim 100^\circ\text{C}$ la $t_2 = 20^\circ\text{C}$ masa fiecărei picături a scăzut cu $\Delta m = 13,5 \text{ mg}$. Cunoscând tensiunea superficială a apei la temperatura t_2 , aflați σ la temperatura t_1 .

Rezolvare. Conform problemei precedente 4.1.12,

$$m_1 g = \sigma_1 \pi D , \quad m_2 g = \sigma_2 \pi D . \quad (1)$$

Scăzând ecuațiile membru cu membru, obținem:

$$(m_2 - m_1)g = \Delta m g = (\sigma_2 - \sigma_1) \pi D ,$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 - \Delta m g / (\pi D) = 73 \text{ mN/m} - 14 \text{ mN/m} = 59 \text{ mN/m} . \quad (2)$$

4.1.14. Printr-un tub capilar picură mase egale de apă și alcool (la 20°C). Aflați raportul numerelor de picături.

Rezolvare. Conform problemelor precedente :

$$(M/N_{ap}) \cdot g = \sigma_{ap} \cdot \pi D, \quad (M/N_{alc.}) \cdot g = \sigma_{alc.} \cdot \pi D, \quad (1)$$

$$N_{alc.} / N_{ap} = \sigma_{ap} / \sigma_{alc.} = 3,3. \quad (2)$$

4.1.15. Printr-un tub capilar s-au picurat mase egale de apă, întâi la temperatura $t_1 = 8,0^\circ\text{C}$ obținându-se $N_1 = 40$ picături, apoi la $t_2 = 80^\circ\text{C}$, obținându-se $N_2 = 48$ picături. Considerând densitatea apei practic constantă, aflați raportul coeficienților de tensiune superficială.

Rezolvare. Ca în problemele precedente, greutatea unei picături în momentul desprinderii echilibrează rezultanta forțelor de tensiune superficială care acționează pe conturul circular de desprindere: $Mg / N_1 = \sigma_1 \pi d$, $Mg / N_2 = \sigma_2 \pi d \rightarrow \sigma_1 / \sigma_2 = N_2 / N_1 = 1,2$.

4.1.16. Printr-un tub capilar s-au picurat $N_1 = 22$ picături de apă la temperatura $t = 20^\circ\text{C}$, iar apoi un volum egal, dar de $N_2 = 60$ picături de alcool. Cunoscând tensiunea superficială a apei și densitățile lichidelor, aflați tensiunea superficială a alcoolului (metoda stalagmometrică).

Rezolvare. Avem, pe de o parte, condiția de desprindere a unei picături:

$$m_1 g = \sigma_1 \pi d, \quad m_2 g = \sigma_2 \pi d, \quad (1)$$

iar pe de altă parte, $V = N_1 \cdot m_1 / \rho_1 = N_2 \cdot m_2 / \rho_2$,

$$\sigma_2 / \sigma_1 = m_2 / m_1 = (\rho_2 / \rho_1) N_1 / N_2, \quad (2)$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 (\rho_2 / \rho_1) N_1 / N_2 = 21 \text{ mN/m}. \quad (3)$$

4.1.17. Aflați densitatea aerului într-o bulă de aer de diametru $D = 15$ mm, aflată la adâncimea $h = 4,9$ m în apă. Temperatura este $t = 20^\circ\text{C}$ și presiunea atmosferică este cea normală. De câte ori această densitate este mai mare decât densitatea aerului exterior?

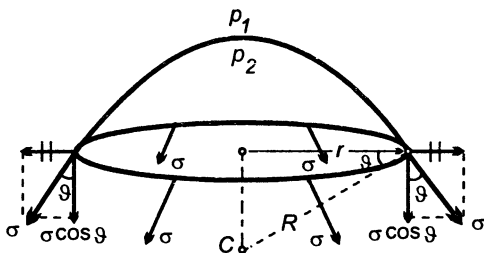


Fig.4.1.17

Rezolvare. Presiunea de o parte și de alta a unui menisc de lichid este diferită din cauza forțelor de tensiune superficială care acționează de-a lungul conturului meniscului și care dau o presiune

suplimentară Δp sub menisc (de partea *concavă*). Calculele arată că acest **salt de presiune** pentru menisc sferic (calotă sferică) este

$$\Delta p = 2 \sigma / R \quad (\text{formula lui Laplace pentru menisc sferic}) . \quad (1)$$

Această formulă se poate demonstra în mai multe feluri, de exemplu luând un menisc sub formă de calotă sferică, ca în figură.

Forțele de tensiune superficială sunt *tangente la menisc* (calotă) și *perpendiculare pe conturul* acestuia. Componentele transversale pe axa meniscului se anulează reciproc, două câte două diametral opuse, iar cele longitudinale dau rezultanta : $\sigma \cos \vartheta \cdot 2\pi r$, care împărțită la aria secțiunii πr^2 dă suplimentul de presiune :

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \sigma \cos \vartheta \cdot 2\pi r : (\pi r^2) = (2\sigma \cos \vartheta) / r = 2\sigma / R , \quad (2)$$

unde R este raza sferei, adică *raza de curbură* a meniscului (calotei), iar r - raza conturului circular al bazei meniscului (calotei).

Rețineți această formulă pentru problemele care urmează. Se poate da și o altă demonstrație a acestei formule pe baza formulei lui Jurin pentru ascensiuni capilare.

Observăm că presiunea este mai **mare** de partea **concavă** a meniscului (calotei) și mai mică de partea convexă.

Evident, pentru menisc plan : $\Delta p = 0$, ($R \rightarrow \infty$).

Presiunea imediat în exteriorul bulei este egală cu presiunea atmosferică H la care se adaugă presiunea hidrostatică a păturii de apă ρgh . Presiunea aerului din interiorul bulei trebuie să depășească presiunea exterioară $H + \rho gh$ cu *saltul de presiune* (2) din cauza forțelor de tensiune superficială date de pelicula (stratul) superficială de apă care delimitează bula de aer, deci ($D/2$ - raza de curbură a meniscului):

$$p = H + \rho gh + \Delta p = H + \rho gh + 4\sigma / D = 168,8 \text{ kPa} . \quad (1)$$

$$\text{Densitatea aerului : } \rho = \mu p / (RT) = 2,0 \text{ kg/m}^3 , \quad (2)$$

$$\rho / \rho_0 = p / p_0 = 1,67 . \quad (3)$$

4.1.18. Presiunea aerului din interiorul unei bule de săpun este cu $\Delta p = 1,00$ torr mai mare decât cea atmosferică. Care este diametrul bulei ?

Rezolvare. Aerul din interiorul bulei de săpun este separat de aerul atmosferic exterior printr-o pătură din soluția de apă și săpun, mărginită de **două** straturi superficiale de lichid, una din interior și una din exterior. Prin urmare, presiunea aerului din interior este , conform problemei precedente 4.1.17 :

$$p = 2 \sigma / R_1 + 2 \sigma / R_2 + H , \quad (1)$$

dar $R_1 \approx R_2 = R = D/2$, atunci

$$\Delta p = p - H = 4\sigma / R = 8\sigma / D, \quad D = 8\sigma / \Delta p = 2,6 \text{ mm}. \quad (2)$$

4.1.19. Ce forță (suplimentară) trebuie aplicată pentru a dezlipi (nu prin alunecare) două plăci paralele de sticlă ude, de dimensiuni $a \times b = 9 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$. Grosimea peliculei de apă dintre plăci este $d = 50 \mu\text{m}$.

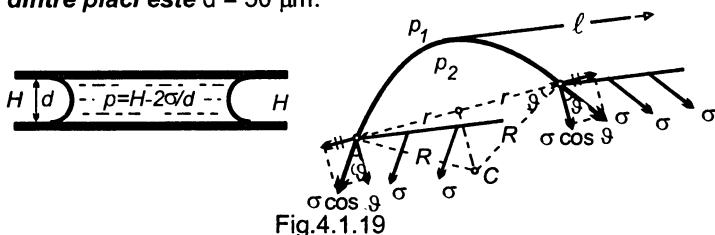


Fig.4.1.19

Rezolvare. Deoarece grosimea peliculei $d = 0,050 \text{ mm} \ll a, b \sim 100 \text{ mm}$, meniscul are forma unui *igheab* aproape rectiliniu, ca în figură. Forțele de tensiune superficială se descompun, componentele normale la planul de simetrie se distruge reciproc două câte două, diametral opuse, iar cele în planul de simetrie dau rezultanta $\sigma \cos \vartheta \cdot 2\ell$, care împărțită la aria transversală longitudinală a igheabului $2r\ell$ ne dă surplusul de presiune de sub menisc :

$$\Delta p = \sigma \cos \vartheta \cdot 2\ell : (2r\ell) = \sigma \cos \vartheta : r = 2\sigma \cos \vartheta : d = \sigma / R \quad (1)$$

(formula lui **Laplace** pentru menisc cilindric) ,

unde R este raza cilindrului, iar $2r = d$ este lățimea meniscului cilindric. Rețineți această formulă pentru problemele care urmează.

Presiunea în lichid va fi deci mai mică decât în exterior în situația din figură :

$$p = H - 2\sigma / d, \quad \Delta p = H - p = 2\sigma / d, \quad (2)$$

unde raza de curbură a meniscului cilindric este $d/2$ dacă apa udă perfect sticla ($\vartheta = 0$), de aceea pentru a separa plăcile trebuie o forță suplimentară (pe lângă greutatea plăcii superioare):

$$F = \Delta p \cdot S = (2\sigma / d) a \cdot b = 31,5 \text{ N}. \quad (3)$$

4.1.20. Între două plăci plan-paralele orizontale se află $m = 5,0 \text{ g}$ de mercur. Punând pe placa superioară un corp de masă $M = 5,0 \text{ kg}$ distanța dintre plăci devine $d = 87 \mu\text{m}$. Neglijând greutatea plăcii superioare, aflați coeficientul de tensiune superficială al mercurului.

Rezolvare. Analog problemei precedente 4.1.19, ținând seama că mercurul (spre deosebire de apă) practic *nu udă* deloc sticla ($\vartheta \approx 180^\circ$), avem presiunea în mercur ($d/2$ - raza de curbură a meniscului cilindric) :

$$p = H + 2\sigma / d. \quad (1)$$

Pe de altă parte, această presiune trebuie să echilibreze presiunea exercitată de placă Mg/S plus presiunea atmosferică :

$$p = H + 2\sigma/d = Mg/S + H, \quad \Delta p = 2\sigma/d = Mg/S, \quad (2)$$

dar masa mercurului $m = \rho S d$:

$$\sigma = Mg d / (2S) = Mg \rho d^2 / (2m) = 0,50 \text{ N/m} . \quad (3)$$

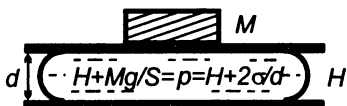


Fig.4.1.20

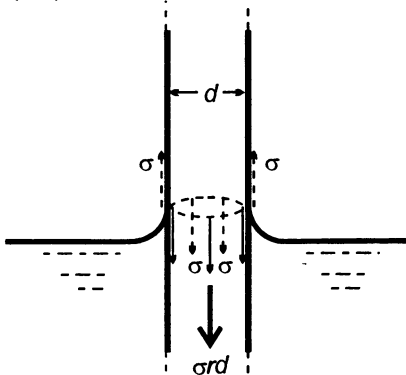


Fig.4.1.22

4.1.21. Între două plăci de sticlă orizontale se află mercur de forma unui disc de rază $r = 2,28$ cm și grosime $d = 0,38$ cm. Ce greutate trebuie așezată pe placa superioară pentru ca distanța dintre plăci să se micșoreze de $N = 10$ ori ? Unghiul de racordare (umectație) al mercurului cu sticla : $\vartheta = 138^\circ$.

Rezolvare. Aplicăm rezultatele de la problema 4.1.19, ținând seama de unghiul de racordare (umectație) ϑ . Presiunea suplimentară exercitată de corpul așezat , $mg / (\pi r^2)$, este echilibrată de creșterea suplimentară a presiunii din mercur. Prin micșorarea grosimii stratului de mercur de N ori, crește aria de N ori (același volum de mercur), deci

$$mg / (N\pi r^2) = [H - 2\sigma \cos \vartheta : (d/N)] - [H - 2\sigma \cos \vartheta : d] = - (N - 1) 2\sigma \cos \vartheta : d , \quad (1)$$

$$m = N(N - 1) \pi r^2 2\sigma (- \cos \vartheta) : (gd) = 2,9 \text{ kg} . \quad (2)$$

4.1.22. Un areometru (densimetru) cu partea cilindrică verticală de diametru $d = 9,0$ mm plutește pe apă. Cu cât se schimbă adâncimea de scufundare a areometrului, dacă pe suprafața apei picurăm puțin alcool ?

Rezolvare. Forțele de tensiune superficială acționează pe circumferința părții cilindrice verticale a areometrului, după care se racordează pelicula de lichid. Considerând că apa și alcoolul udă

perfect sticla, unghiul de racordare (umectare) $\vartheta = 0$ și forțele de tensiune superficială sunt verticale. Deoarece σ_2 (alcool) $< \sigma_1$ (apă), rezultanta forțelor de tensiune superficială $\sigma \pi d$ se va micșora și deci areometrul va urca, fiind necesară o forță arhimedică mai mică :

$$(\sigma_2 - \sigma_1) \pi d = \Delta h (\pi d^2 / 4) \rho g , \quad (1)$$

$$\Delta h = 4(\sigma_2 - \sigma_1) : (\rho g d) = - 2,4 \text{ mm (se ridică) .} \quad (2)$$

4.1.23. Un areometru, având partea cilindrică verticală de diamteru $D = 9,0$ mm, plutește într-un lichid de densitate $\rho = 800$ kg/m³ care udă complet sticla ($\sigma = 30$ mN/m). Cu cât se schimbă adâncimea de scufundare dacă prin murdărirea cu grăsime a tubului lichidul nu mai udă deloc sticla ?

Rezolvare. Conform problemei precedente 4.1.22 :

$$\Delta h = 4(\sigma_2 \cos \vartheta_2 - \sigma_1 \cos \vartheta_1) : (\rho g d) , \quad (1)$$

dar $\vartheta_1 = 0$ (udă perfect) și $\vartheta_2 = 180^\circ$ (nu udă deloc), iar $\sigma_1 = \sigma_2$, altfel spus se inversează sensul forțelor de tensiune superficială: în loc să tragă de tub în jos, ele vor trage de tub în sus :

$$\Delta h = - 8 \sigma : (\rho g d) = - 3,5 \text{ mm (se ridică) .} \quad (2)$$

* *

4.2. Fenomene capilare

4.2.1. Aflați coeficientul de tensiune superficială al unui lichid, știind că într-un capilar de rază interioară $r = 2,00$ mm, cufundat vertical într-un lichid, care udă perfect sticla, intră o masă $m = 90$ mg de lichid. Dacă picurăm lichidul prin capilar, care va fi masa unei picături ?

Rezolvare. Conform formulei ascensiunii capilare (*Jurin*)

$$(\vartheta = 0): \quad h = 2\sigma / (r\rho g), \quad \text{dar} \quad m = \rho \pi r^2 h, \quad (1)$$

$$\sigma = h r \rho g / 2 = [m / (\rho \pi r^2)] r \rho g / 2 = mg / (2\pi r) = 70 \text{ mN/m}. \quad (2)$$

În momentul desprinderii unei picături greutatea ei mg învinge rezultanta forțelor de tensiune superficială, care acționează pe conturul circular al orificiului capilarului : $\sigma \cdot 2\pi r$,

$$m_0 g = \sigma \cdot 2\pi r, \quad m_0 = 2\pi r \sigma / g = m = 90 \text{ mg}. \quad (3)$$

În capilarul cufundat în lichid intră exact o picătură de lichid.

4.2.2. Într-o lampă cu petrol, petrolul urcă prin fitil o distanță $h = 10$ cm. Care trebuie să fie diametrul porilor din fitil (presupuși cilindrici) ?

Rezolvare. Conform formulei ascensiunii capilare (*Jurin*)

$$(\vartheta = 0): \quad h = 2\sigma / (r\rho g), \quad D = 2r = 4\sigma / (\rho g h) = 0,15 \text{ mm}.$$

4.2.3. Un tub capilar cu raza interioară $r = 0,16$ mm este cufundat vertical în apă. Cu cât trebuie să mărim presiunea aerului din tubul capilar pentru a desființa ascensiunea capilară ?

Rezolvare. De o parte și de alta a unui menisc de lichid presiunea este diferită, există un **salt de presiune** la traversarea unui menisc de lichid (R - raza de curbură a meniscului sferic) :

$$\Delta p = 2\sigma / R, \quad \text{menisc sferic (Laplace)}, \quad (1)$$

presiunea de partea concavă fiind mai mare. Am demonstrat această formulă la problema 4.1.17. Dăm acum o demonstrație bazată pe formula ascensiunii capilare (*Jurin*). În baza principiului vaselor comunicante, presiunea într-un plan orizontal dus prin același lichid în vase comunicante este aceeași. Prin urmare, la baza tubului capilar din figură presiunea trebuie să fie egală cu presiunea atmosferică H . Dar atunci la înălțimea h în lichidul din

capilar, presiunea va fi $H - \rho gh$ și deci saltul de presiune este chiar ρgh :
 $\Delta p = \rho gh = \rho g \cdot 2\sigma \cos \vartheta : (r \rho g) = 2\sigma \cos \vartheta : r = 2\sigma / R$, (1)
 (r - raza tubului cilindric, R - raza de curbură a meniscului, adică raza sferei din care face parte meniscul).

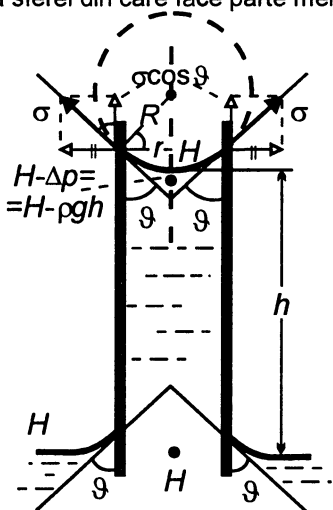


Fig.4.2.3

Acum este clar că pentru a desființa ascensiunea capilară trebuie să mărim presiunea aerului din tubul capilar exact cu Δp :

$$\Delta p = \rho gh = 2\sigma \cos \vartheta : r = 0,91 \text{ kPa} = 6,8 \text{ torr}, \quad (2)$$

unde pentru apă - sticlă ϑ se poate lua zero. (Δp de mai sus, exprimat în mm col. lich. coincide practic cu h exprimat în mm.)

4.2.4. Diametrul interior al unui tub barometric este $D = 7,0$ mm. Calculați corecția care trebuie adusă înălțimii coloanei de mercur pentru a putea calcula presiunea atmosferică cu formula presiunii hidrostactice a coloanei de mercur.

Rezolvare. Considerând că mercurul practic nu udă deloc sticla, forțele de tensiune superficială aduc o presiune suplimentară asupra capătului superior al coloanei de mercur micșorând coloana cu
 $\Delta h = 2\sigma / (\rho g R) = 4\sigma / (\rho g D) = 2,0 \text{ mm}$ (1)
 sau corecția în unități de presiune:

$$\Delta p \approx \rho g \Delta h = 4\sigma / D = 270 \text{ Pa}, \quad (2)$$

care trebuie adăugată la valoarea presiunii, calculată sau citită în ipoteza absenței forțelor de tensiune superficială.

4.2.5. Într-un vas cu apă este cufundat un capilar de rază interioară $r = 0,50$ mm, iar înălțimea coloanei de apă din capilar față de nivelul apei din vas (ascensiunea capilară) $h = 20$ mm. Aflați raza de curbură a meniscului din capilar. Care este unghiul de racordare (umectajie) ϑ ?

Rezolvare. Conform formulei cunoscute pentru ascensiunea capilară (problema 4.2.3) : $h = 2\sigma / (\rho g R) = 2\sigma \cos \vartheta : (\rho g r) \rightarrow$

$$R = 2\sigma / (\rho g h) = 0,75 \text{ mm} > r = 0,50 \text{ mm} ; \quad (1)$$

$$\cos \vartheta = r / R = 2 / 3 , \quad \vartheta = 48^\circ 11' . \quad (2)$$

4.2.6. Într-un vas cu apă este cufundat un capilar de diametru interior $D = 1,0$ mm. Ascensiunea capilară este $h = 28$ mm. a) Care este raza de curbură a meniscului din capilar ? , b) Cât ar fi ascensiunea capilară dacă umectarea ar fi perfectă ? c) Care este unghiul de racordare (umectajie) al apei față de capilar ?

Rezolvare. a) Din formula ascensiunii capilare (v. problema precedentă 4.2.5):

$$R = 2\sigma / (\rho g h) = 0,53 \text{ mm} > D / 2 = 0,50 \text{ mm} . \quad (1)$$

$$b) h' = 4\sigma / (\rho g D) = 29,8 \text{ mm} > h = 28 \text{ mm} . \quad (2)$$

$$c) \cos \vartheta = r / R = D / (2R) = 0,94 , \quad \vartheta = 19^\circ 24' . \quad (3)$$

4.2.7. Într-un vas cu mercur este cufundat un tub capilar. Depresiunea capilară este $h = - 3,7$ mm. a) Care este raza de curbură a meniscului de mercur din capilar ? , b) Care este unghiul de racordare (umectajie) dacă raza capilarului este $r = 1,5$ mm ?

Rezolvare. a) Analog problemei precedente 4.2.6, avem:

$$R = 2\sigma / (\rho g h) = - 2,0 \text{ mm} . \quad (1)$$

$$b) \cos \vartheta = r / R = - 0,75 , \quad \vartheta = 138^\circ 36' . \quad (2)$$

4.2.8. Într-un capilar vertical, de rază interioară r , deschis la capete, se află o coloană de apă de lungime h . Ce rază de curbură are meniscul superior și cel inferior, dacă lungimea coloanei este: a) maximă posibilă, b) egală cu valoarea ascensiunii capilare, c) mai mică decât valoarea ascensiunii capilare? Câte picături vor cădea dacă suflăm la capătul superior ?

Rezolvare. În momentul desprinderii unei picături, greutatea ei $m_1 g$ învinge rezultanta forțelor de tensiune superficială care acționează pe conturul capătului inferior :

$$m_1 g = \sigma \cdot 2\pi r , \quad \text{dar } m_1 = \rho \pi r^2 h_1 , \quad h_1 = 2\sigma / (\rho g r) , \quad (1)$$

înălțimea ocupată de o picătură reprezintă chiar ascensiunea capilară .

La capătul superior meniscul va fi emisferic $R_1 = r$ (considerăm că apa udă perfect sticla).

a) Lungimea maximă a coloanei va fi atunci când meniscul inferior devine emisferic cu convexitatea spre exterior, deci $R_2 = r$, și conform figurii, diferența de presiune de la capetele coloanei este echilibrată de presiunea hidrostatică a coloanei :

$$\begin{aligned} \rho gh_{\max} &= (H + 2\sigma / R_2) - (H - 2\sigma / R_1) = 2\sigma (1/R_2 + 1/R_1) = \\ &= 4\sigma / r \rightarrow h_{\max} = 4\sigma / (\rho gr) = 2 h_1, \end{aligned} \quad (2)$$

dublul ascensiunii capilare, deci două picături.

b) În cazul ascensiunii capilare meniscul inferior dispare, va fi plan, $R_2 \rightarrow \infty$, atunci : $\rho gh = 2\sigma (1/R_2 + 1/R_1) \rightarrow$

$$2\sigma / R_1 = 2\sigma / r, \quad h = 2\sigma / (\rho gr) = h_1, \quad (3)$$

am regăsit valoarea ascensiunii capilare.

c) Dacă meniscul inferior devine concav spre exterior, R_2 schimbă semnul și atunci :

$$\begin{aligned} \rho gh &= (H - 2\sigma / |R_2|) - (H - 2\sigma / R_1) = 2\sigma (1/R_1 - 1/|R_2|), \\ h &= [2\sigma / (\rho gr)] (1 - r/|R_2|) = h_1(1 - r/|R_2|) < h_1, \quad (|R_2| > r). \end{aligned} \quad (4)$$

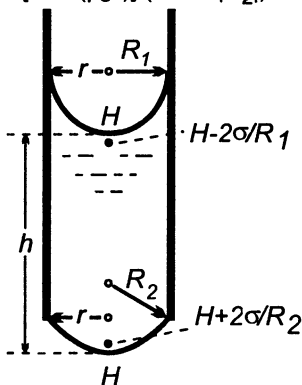


Fig.4.2.8

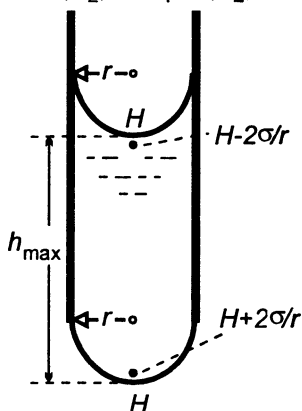


Fig.4.2.9

4.2.9. Într-un capilar orizontal de diametru interior $D = 2,0$ mm, se află o coloană de apă de lungime $h = 10$ cm. Punem capilarul vertical : a) Câte picături de apă vor cădea ?, b) Ce masă m_1 și ce diametru D_1 are fiecare picătură ?, c) Ce lungime va avea coloana de apă rămasă în capilar ?, d) Ce rază de curbură R_2 va avea meniscul inferior ?

Rezolvare. Lungimea *maximă* a coloanei se obține atunci când meniscul inferior devine convex spre exterior ca în figură. Diferența de presiune de la capetele coloanei de mercur este echilibrată de presiunea hidrostatică ρgh :

$$\rho gh_{\max} = (H + 2\sigma / r) - (H - 2\sigma / r) = 4\sigma / r ,$$

$$h_{\max} = 4\sigma / (\rho g r) = 2 h_1 , \quad (D = 2 r) , \quad (1)$$

unde h_1 este valoarea ascensiunii capilare.

a) În momentul desprinderii greutatea picăturii învinge rezultanta forțelor de tensiune superficială :

$$m_1 g = \sigma \cdot 2\pi r , \quad \text{dar} \quad m_1 = \rho \pi r^2 h_1 , \quad (2)$$

$$h_1 = 2\sigma / (\rho g r) = 14,9 \text{ mm} - \text{înălțimea ocupată de o picătură} . \quad (3)$$

Numărul de picături care vor cădea este egal cu numărul de înălțimi h_1 care se cuprind în înălțimea h dată , **minus 1**, deoarece în capilar rămâne o coloană $< 2h_1$, dar $> h_1$,

$$N = [h / h_1 - 1] = 5 \text{ picături} , \quad (4)$$

unde [...] înseamnă *partea întreagă* a numărului cuprins între paranteze.

$$b) m_1 = \sigma \pi D / g = 0,468 \text{ mg} , \quad (5)$$

$$m_1 = \rho \pi D_1^3 / 6 = \sigma \pi D / g , \quad D_1 = \sqrt[3]{6\pi D / (\rho g)} = 4,47 \text{ mm} . \quad (6)$$

c) Înălțimea coloanei de apă rămasă în capilar :

$$h_r = h - N h_1 = 25,5 \text{ mm} . \quad (7)$$

d) Presiunea hidrostatică a coloanei rămase este echilibrată de diferența presiunilor de la capetele coloanei :

$$\begin{aligned} \rho gh_r &= (H + 2\sigma / R_2) - (H - 2\sigma / r) = 2\sigma (1/R_2 + 1/r) = \\ &= \rho g h_1 (1/R_2 + 1/r) \rightarrow R_2 = r : (h_r / h_1 - 1) = 1,4 \text{ mm} . \end{aligned} \quad (8)$$

4.2.10. Pe fundul unui vas cu mercur există un mic orificiu. Ce diametru maxim poate avea acest orificiu pentru ca mercurul să nu curgă, dacă stratul de mercur are înălțimea $h = 30 \text{ mm}$?

Rezolvare. Spre exteriorul orificiului se va forma un menisc convex care ține în echilibru coloana de mercur de deasupra, deci avem condiția : $\rho (\pi D^2 / 4) hg = \sigma \cdot \pi D \rightarrow$

$$D \leq 4 \sigma / (\rho gh) = 0,50 \text{ mm} . \quad (1)$$

Sau altfel, saltul de presiune la traversarea meniscului inferior este anihilat de presiunea hidrostatică a coloanei de mercur de deasupra:

$$\Delta p = 2 \sigma / R = 4 \sigma / D = \rho gh . \quad (2)$$

Observăm că h corespunde ascensiunii capilare (*Jurin*).

4.2.11. Pe fundul unui vas de secțiune $S = 30 \text{ cm}^2$ există un orificiu de diametru $D = 0,50 \text{ mm}$. Ce masă de mercur poate fi turnată în vas, fără să curgă prin orificiu ?

Rezolvare. Analog problemei precedente 4.2.10, spre exteriorul orificiului bombează meniscul convex de mercur, astfel încât forțele de tensiune superficială echilibrează greutatea coloanei de mercur de deasupra, sau altfel, saltul de presiune la traversarea meniscului va fi echilibrat de presiunea hidrostatică a coloanei de mercur de deasupra :

$$\Delta p = 4 \sigma / D = \rho g h . \quad (1)$$

(h corespunde ascensiunii capilare *Jurin*).

$$m = \rho S \cdot h = \rho S \cdot 4 \sigma / (\rho g D) = [4 \sigma / (g D)] S = 1,22 \text{ kg} . \quad (2)$$

4.2.12. Aflați diferența de nivel a mercurului între două tuburi capilare comunicante de diametre $D_1 = 1,0 \text{ mm}$ și $D_2 = 2,0 \text{ mm}$.

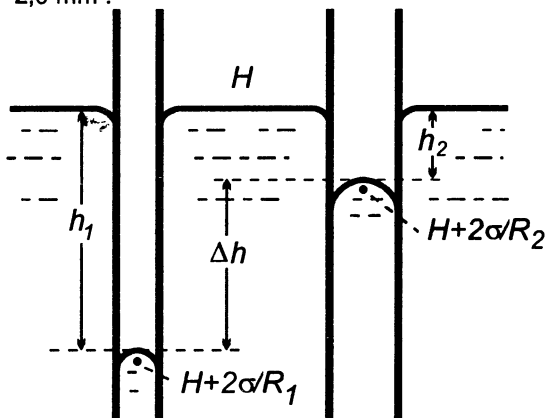


Fig.4.2.12

Rezolvare. Diferența de nivel provine din diferența depresiunilor capilare, așa cum se vede în figură. Aplicăm formula lui *Jurin*:

$$\Delta h = h_1 - h_2 = [4 \sigma / (\rho g)] (1/D_1 - 1/D_2) = 7,5 \text{ mm} .$$

4.2.13. În două tuburi comunicante cu apă diferența de nivel este $\Delta h_1 = 2,6 \text{ cm}$, iar cu alcool este $\Delta h_2 = 1,0 \text{ cm}$.

Cunoscând coeficientul de tensiune superficială al apei și densitățile lichidelor, aflați σ pentru alcool.

Rezolvare. Analog problemei precedente 4.2.12, diferența de nivel provine din diferența ascensiunilor capilare, conform formulei lui *Jurin* :

$$\Delta h_1 = [2 \sigma_1 / (\rho_1 g)] (1/R_1 - 1/R_2) ,$$

$$\Delta h_2 = [2 \sigma_2 / (\rho_2 g)] (1/R_1 - 1/R_2) . \quad (1)$$

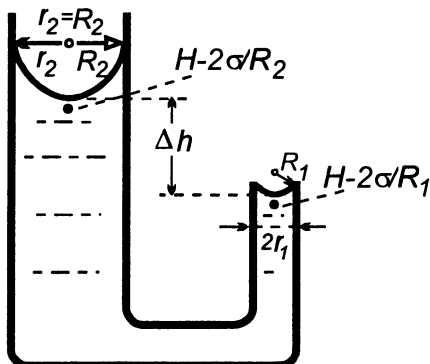
Prin împărțirea membru la membru a ecuațiilor, obținem:

$$\Delta h_2 : \Delta h_1 = \sigma_2 \rho_1 : (\sigma_1 \rho_2) \rightarrow$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 (\Delta h_2 / \Delta h_1) \rho_2 / \rho_1 = 21 \text{ mN/m} . \quad (2)$$

4.2.14. Tubul îndoit din figură cu razele $r_1 = 0,50 \text{ mm}$, $r_2 = 0,90 \text{ mm}$, este umplut cu petrol (udă complet sticla). Pentru ce denivelări Δh meniscul inferior va fi : a) convex cu $|R_1| = r_1$, b) convex cu $|R_1| = r_2$, c) plan ($R_1 \rightarrow \infty$) , d) concav cu $R_1 = r_2$, e) concav cu $R_1 = r_1$?

Fig.4.2.14



Rezolvare. Considerând cazul din figură ($R_2 = r_2$), diferența presiunilor în petrol de la capetele tubului îndoit este echilibrată de presiunea hidrostatică a coloanei de petrol :

$$\rho g \Delta h = (H - 2\sigma / R_1) - (H - 2\sigma / r_2) = 2\sigma (1/r_2 - 1/R_1) , \quad (1)$$

$$\Delta h = [2\sigma / (\rho g r_2)] (1 - r_2 / R_1) , \quad h_2 = 2\sigma / (\rho g r_2) = 7,4 \text{ mm} , \quad (2)$$

$$\Delta h = h_2 (1 - r_2 / R_1) = 7,4 (1 - r_2 / R_1) , \quad [\text{mm}] . \quad (3)$$

Pentru ca $\Delta h \geq 0$, trebuie ca

$$1 - r_2 / R_1 \geq 0 \text{ sau } (R_1 - r_2) / R_1 \geq 0 \rightarrow R_1 < 0 \text{ sau } R_1 \geq r_2 . \quad (4)$$

Pe de altă parte, $|R_1| \geq r_1$, deci $\Delta h > 0 \rightarrow$

$$R_1 \leq -r_1 \text{ (menisc convex) sau } R_1 \geq r_2 \text{ (menisc concav)} . \quad (5)$$

a) Δh_{max} se obține atunci când meniscul 1 este convex (bombat) spre exterior, adică $R_1 = -r_1$ în formula (3) :

$$\Delta h_{\text{max}} = h_2 (1 + r_2 / r_1) = 20,7 \text{ mm} . \quad (6)$$

Dacă am turna petrol mai mult, atunci surplusul va curge prin capătul inferior 1 .

b) Facem în (3) $R_1 = -r_2$:

$$\Delta h = h_2 (1 + r_2/r_2) = 14,8 \text{ mm} . \quad (7)$$

c) Pentru menisc 1 plan facem $R_1 \rightarrow \infty$: $\Delta h = h_2$ (8)

(ascensiunea capilară obișnuită în ramura 2).

d) $R_1 = r_2$, meniscurile sunt de aceeași rază de curbură r_2 în ambele ramuri, deci denivelarea se anulează $\Delta h = 0$.

e) Dacă acum $r_1 \leq R_1 < r_2$, denivelarea se inversează și pentru $R_1 = r_1$ este din nou maximă (dar inversată),

$$\Delta h_m = h_2 (1 - r_2/r_1) = - (h_1 - h_2) = - 5,9 \text{ mm} . \quad (9)$$

Pin urmare, denivelarea este cuprinsă în intervalul :

$$\Delta h_{\max} \geq \Delta h \geq \Delta h_m \quad (10)$$

și nu poate depăși aceste limite, căci altfel, dacă $\Delta h > \Delta h_{\max}$, petrolul va curge prin capătul 1 sau dacă $\Delta h < \Delta h_m$, petrolul din 1 va coborî.

4.2.15. Între două plăci plan-paralele de sticlă, cu distanța dintre ele $d = 0,25$ mm, ascensiunea capilară a unui lichid, care udă complet sticla (cu $\sigma = 30$ mN/m), este $h = 31$ mm. Aflați densitatea lichidului .

Rezolvare. Meniscul lichidului între două plăci plan-paralele este de forma unui *igheab* cilindric orizontal, care devine *semi-cilindru* dacă lichidul udă *perfect* pereții. Conform formulei de la problema 4.1.19 : $h = 2\sigma / (\rho g d) \rightarrow \rho = 2\sigma / (h g d) = 790 \text{ kg/m}^3$.

4.2.16. Două plăci plan-paralele verticale de sticlă sunt parțial cufundate în alcool. Distanța dintre plăci $d = 0,20$ mm, lățimea $\ell = 19,0$ cm. Aflați ascensiunea capilară (unghiul de racordare $\vartheta = 0$) și forța cu care se atrag plăcile .

Rezolvare. Conform rezultatului de la problema 4.1.19 sau de la problema precedentă 4.2.16 : $h = 2\sigma / (\rho g d) = 2,8 \text{ cm}$. (1)

Presiunea în lichid imediat sub menisc este

$$H - \sigma / R = H - 2\sigma / d . \quad (2)$$

Pe măsură ce coborîm în lichid presiunea crește cu $\rho g x$:

$$p = H - 2\sigma / d + \rho g x . \quad (3)$$

Prin urmare, diferența de presiune dintre exterior și interiorul lichidului scade *uniform* :

$$\Delta p = H - p = 2\sigma / d - \rho g x = 2\sigma / d - (2\sigma / d) x / h = (2\sigma / d)(1 - x / h) , x \in (0, h) . \quad (4)$$

Pentru a calcula forța de atracție dintre plăci, luăm o diferență de presiune *medie*, adică ($x = h/2$) :

$$\begin{aligned} \overline{\Delta p} &= \sigma / d, \quad F = \overline{\Delta p} \cdot S = \overline{\Delta p} \cdot \ell h = (\sigma / d) \ell h = \\ &= 2\sigma^2 \ell : (\rho g d^2) = 0,59 \text{ N}. \end{aligned} \quad (5)$$

4.2.17. Două plăci plan-paralele verticale sunt cufundate parțial într-un lichid care le udă perfect. Se cunosc : lățimea plăcilor ℓ , distanța dintre plăci d , densitatea lichidului ρ , tensiunea superficială σ , unghiul de racordare ϑ . Aflați forța exercitată asupra plăcilor.

Rezolvare. Analog problemei precedente 4.2.16 sau problemei 4.1.19, avem: $\Delta p = \sigma / R$, dar $d/2 = R \cos \vartheta$,

$$\Delta p = 2 \sigma \cos \vartheta / d. \quad (1)$$

Acest salt de presiune, de la meniscul superior, scade *liniar* până la anulare la baza păturii ascendente. Luăm o diferență *medie* de presiune și calculăm forța :

$$F = (\Delta p / 2) \cdot \ell h = 2 \ell \sigma^2 \cos^2 \vartheta : (\rho g d^2). \quad (2)$$

Plăcile se "atrag" cu această forță (sunt împinse de presiunea atmosferică una spre cealaltă).

4.2.18. Două plăci verticale, formând un unghi diedru de unghi foarte mic α , sunt cufundate într-un lichid de densitate ρ , tensiune superficială σ și unghi de racordare ϑ . Care va fi ecuația liniei de ascensiune capilară între plăci ?

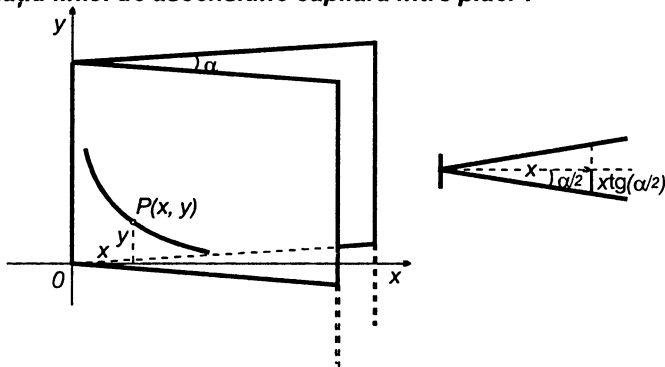


Fig.4.2.18

Rezolvare. Meniscul are forma unui jgheab înclinat. Luând o porțiune extrem de mică din acest jgheab, saltul de presiune la trecerea prin stratul superficial va fi :

$$\sigma \cos \vartheta : [x \operatorname{tg}(\alpha / 2)] \approx 2 \sigma \cos \vartheta : (x \alpha) \quad (1)$$

(sub menisc presiunea este mai mică decât cea atmosferică), unde pentru unghiuri α mici ($< 6^\circ$), $\operatorname{tg} \alpha$, la fel ca și $\sin \alpha$, se aproximează prin unghiul α însuși dar exprimat în *radiani*.

Diferența de presiune (1) este echilibrată de presiunea hidrostatică a coloanei de lichid :

$$\rho g y = 2 \sigma \cos \vartheta : (x \alpha) \rightarrow y = [2 \sigma \cos \vartheta : (\rho g \alpha)] \cdot (1/x), \quad (2)$$

ceea ce reprezintă ecuația unei *iperbole echilatre*, având ca asimptote orizontala și muchea verticală a unghiului diedru.

4.2.19. Un tub capilar cu capătul superior închis este cufundat vertical în apă. Dacă se cufundă tubul cu $f = 1,5\%$ din lungimea sa, ascensiunea capilară nu apare. Aflați raza interioară a capilarului. Presiunea atmosferică $H = 750$ torr. Care va fi ascensiunea capilară imediat după atingerea lichidului, dacă lungimea tubului $\ell = 80$ mm ?

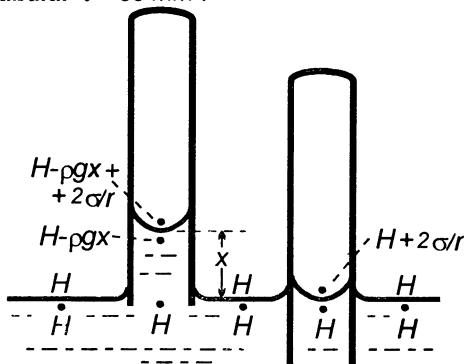


Fig.4.2.19

Rezolvare. În momentul atingerii lichidului în capilar se izolează o anumită masă de aer la presiunea atmosferică, care suferă o transformare *izotermă*. În starea intermediară și cea finală, presiunea aerului se obține ținând seama de saltul de presiune :

$$H \ell = (H - \rho g x + 2\sigma/r) (\ell - x) = (H + 2\sigma/r) (1 - f) \ell. \quad (1)$$

Din prima și ultima egalitate obținem r :

$$H + 2\sigma/r = H/(1 - f) \rightarrow r = 2\sigma(1 - f) : (Hf) = 0,10 \text{ mm}. \quad (2)$$

Deoarece ascensiunea capilară $x \ll \ell$, putem neglija termenul pătratic în x în ecuația (1) :

$$\rho g x^2 - x [\rho g \ell + H/(1 - f)] + H \ell f/(1 - f) = 0, \quad (3)$$

$$x \approx H \ell f : [H + (1 - f) \rho g \ell] = [f \ell H / (\rho g)] : [(1 - f) \ell + H / (\rho g)] \approx f \ell = 1,2 \text{ mm}, \quad (4)$$

dacă neglijăm $(1 - f) \ell \approx 80 \text{ mm} \ll H / (\rho g) = 750 \text{ mm}$.

4.2.20. La ce adâncime h în apă s-au format bule de gaz dacă ajungând la suprafață raza lor este $r = 1,53 \mu\text{m}$ și a crescut de $N = 1,1$ ori. Presiunea atmosferică este $H = 750$ torr ?

Rezolvare. Raza bulei la adâncimea h este r/N , iar volumul V/N^3 . Aerul din interiorul bulei suferă o transformare izotermă, Pentru a afla presiunea aerului din interior trebuie să ținem seama de forțele de tensiune superficială, și anume la trecerea prin stratul superficial al apei care delimitează bula avem un salt de presiune :

$$\Delta p = 2\sigma / r. \quad \text{Legea Boyle-Mariotte se scrie :}$$

$$[(H + \rho gh + 2\sigma / (r/N)] V / N^3 = (H + 2\sigma / r) V, \quad (1)$$

de unde rezultă

$$h = [H / (\rho g)] (N^3 - 1) + [2\sigma / (\rho g r)] N(N^2 - 1) = 5,6 \text{ m}. \quad (2)$$

4.2.21. Un capilar de lungime $\ell = 10$ cm și rază $r = 1,2$ mm, cu capătul superior sudat, se cufundă vertical, pe jumătate, într-un lichid de densitate $\rho = 1000$ kg/m³. Se constată că ascensiunea capilară este $h = 10$ mm (unghiul de racordare $\vartheta = 0$). Presiunea atmosferică este normală. Aflați coeficientul de tensiune superficială a lichidului.

Rezolvare. Analog problemei 4.2.19, aerul închis în capilar suferă o transformare izotermă. Trebuie să ținem seama de saltul de presiune la traversarea meniscului de lichid :

$$H \ell = p (\ell / 2 - h), \quad \text{dar} \quad p - 2\sigma / r + \rho gh = H, \quad (1)$$

$$H \ell = (H - \rho gh + 2\sigma / r) (\ell / 2 - h), \quad (2)$$

$$\sigma = (r/2) [H(\ell + 2h) / (\ell - 2h) + \rho gh] = 74 \text{ mN/m}. \quad (3)$$

4.2.22. Un tub capilar de rază $r = 0,20$ mm și lungime $\ell = 80$ mm atinge cu capătul inferior suprafața apei. Temperatura de-a lungul tubului capilar crește uniform de la 0°C la capătul inferior, până la $t_f = 100^\circ\text{C}$ la capătul superior. Coeficientul de tensiune superficială al apei depinde de temperatură conform tabelului :

$t, ^\circ\text{C}$	0	20	50	90
$\sigma, \text{mN/m}$	76	73	67	60

La ce înălțime urcă apa în capilar ?

Rezolvare. Din variația liniară a temperaturii avem

$$t_f / \ell = t / x \rightarrow t = x t_f / \ell. \quad (1)$$

Condiția de echilibru a coloanei de mercur:

$$mg = \sigma \cdot 2\pi r \text{ sau } \rho \pi r^2 x g = \sigma \cdot 2\pi r,$$

$$\sigma = (1/2) \rho r g x = [\rho r g \ell / (2 t_f)] \cdot t = 78,4 \cdot 10^{-5} t. \quad (2)$$

Dar σ variază cu temperatura după tabel. Problema se rezolvă în acest caz **grafic**. Reprezentăm $\sigma = f(t)$ conform tabelului și inter-

sectăm cu curba $\sigma(t)$ (2). Conform graficului punctul de intersecție are coordonatele : $t = 80$ °C, $\sigma = 62$ mN/m, deci

$$x = \ell t / t_f = 6,4 \text{ cm} .$$

(3)

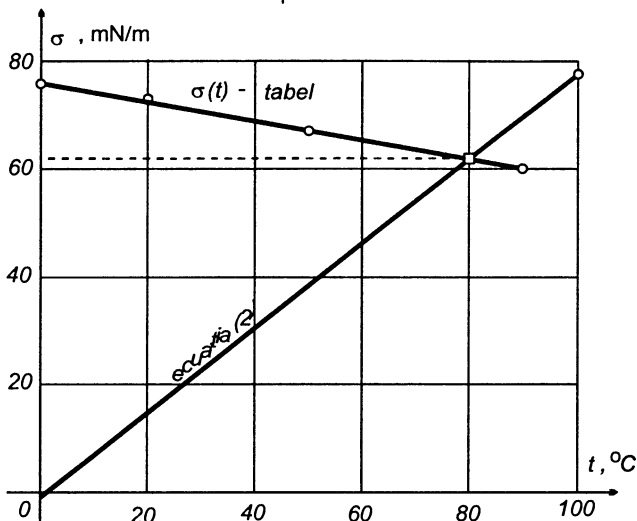


Fig.4.2.22

4.2.23. Un tub capilar din sticlă, cu raza interioară $r = 0,10$ mm, este cufundat vertical, adânc în mercur, astfel încât rămâne în afară o lungime $\ell = 12,5$ cm. Se astupă capătul superior. Cu cât trebuie să tragem în sus capilarul pentru ca depresiunea capilară să dispară ? Presiunea atmosferică $H = 100$ kPa .

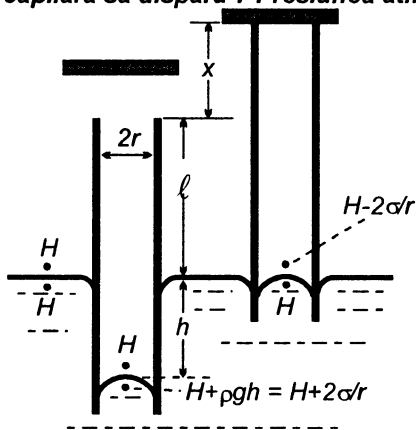


Fig.4.2.23

Rezolvare. Aerul închis în capilar are (inițial) presiunea egală cu cea atmosferică și lungimea $\ell + 2\sigma / (\rho gr)$ și suferă o transformare *izotermă*. Presiunea finală va fi $H - 2\sigma / r$ (saltul de presiune la traversarea meniscului), deci

$$H [\ell + 2\sigma / (\rho gr)] = (H - 2\sigma / r) (\ell + x) , \quad (1)$$

$$x = [\ell + 2\sigma / (\rho gr)] H : (H - 2\sigma / r) - \ell = 9,5 \text{ cm} . \quad (2)$$

(*) **4.2.24.** O buclă din fir de cauciuc, având lungimea ℓ_0 și secțiunea transversală S este așezată pe o peliculă de lichid. Găurind pelicula în interiorul buclei, firul s-a întins formând o circumferință de rază R . Cunoscând modulul de elasticitate E al cauciucului, aflați coeficientul de tensiune superficială σ al lichidului .

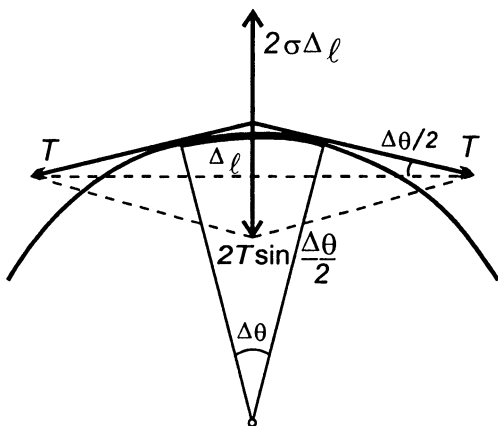


Fig.4.2.24

Rezolvare. Luăm un element de fir de lungime $\Delta \ell$ care subîntinde un unghi la centru $\Delta \theta$. El este supus la cele două tensiuni de la capete care dau o rezultantă *centripetă* $2T \sin(\Delta \theta / 2)$ și la forța de tensiune superficială $2\sigma \Delta \ell$ care este *centrifugă*. Observăm că o peliculă de lichid este mărginită de o parte și de alta de câte un strat superficial, de aceea apare $2\sigma \Delta \ell$ și *nu* $\sigma \Delta \ell$!

$$\text{Condiția de echilibru dă : } 2T \sin(\Delta \theta / 2) = 2\sigma \Delta \ell , \quad (1)$$

$$\text{dar } \ell / (2\pi) = \Delta \ell / \Delta \theta \text{ și } \sin(\Delta \theta / 2) \rightarrow \Delta \theta / 2 \text{ (în radiani)} \quad (2)$$

(pentru unghiuri mici, $\Delta \theta / 2 < 6^\circ$).

Atunci (1) devine $T \Delta \theta = 2\sigma [\ell / (2\pi)] \Delta \theta \rightarrow$

$$T = 2\sigma [\ell / (2\pi)] = 2\sigma R . \quad (3)$$

Dar conform *legii lui Hooke* :

$$T = ES \Delta l / \ell_0 = ES (2\pi R - \ell_0) / \ell_0. \quad (4)$$

Din (3), (4) rezultă

$$\sigma = ES (2\pi R - \ell_0) / (2\ell_0 R). \quad (5)$$

**** 4.2.25. Un tub capilar de rază $r = 1,0$ mm, îndoit și umplut complet cu apă, este rotit în jurul ramurii verticale. Pentru ce viteză unghiulară apa va începe să iasă din capilar ? Apa are coeficientul de tensiune superficială $\sigma = 74,5$ mN/m și udă complet capilarul care are dimensiunile $h = 10$ mm, $\ell = 20$ cm .**

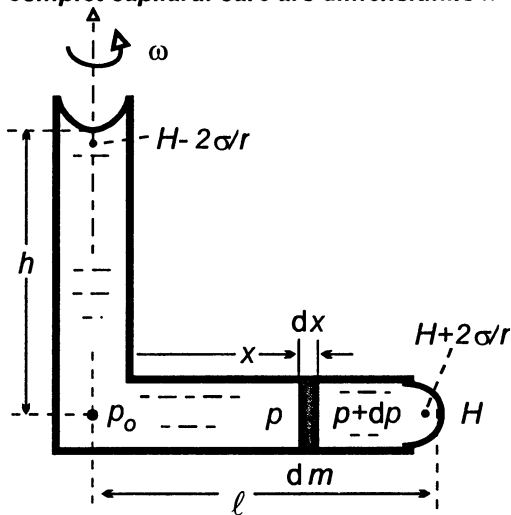


Fig.4.2.25

Rezolvare. Meniscul superior este emisferic concav de rază r . Cel inferior devine în momentul curgerii emisferic convex tot de rază r . Pentru ca în repaus tubul să fie complet umplut cu apă trebuie ca

$$H - 2\sigma/r + \rho gh - 2\sigma/r \leq H, \quad (1)$$

unde $2\sigma/r$ reprezintă saltul de presiune la traversarea meniscului sferic.

Să considerăm un *element* de volum $dV = Sdx$ situat la distanța x de axa de rotație. El efectuează o mișcare de *circulară*, deci

$$dF = dm \cdot \omega^2 x, \text{ unde } dF = (p + dp)S - pS = Sdp, (2)$$

deci

$$Sdp = \rho Sdx \omega^2 x \text{ sau } dp = \rho \omega^2 x dx . \quad (3)$$

Integrăm:

$$\int dp = \rho \int \omega^2 x dx = (1/2) \rho \omega^2 x^2 + C ,$$

unde constanta de integrare C se determină din *condiția la margine*, ca pentru $x = 0$ să avem

$$p = p_0 = H - 2\sigma/r + \rho gh ; \quad (4)$$

deci

$$p_0 = H - 2\sigma/r + \rho gh = C ,$$

atunci presiunea în lichid :

$$p = H - 2\sigma/r + \rho gh + (1/2) \rho \omega^2 x^2 . \quad (5)$$

Putem integra și definit (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_{p_0}^p dp = p - p_0 = \rho \omega^2 \int_0^x x dx = \frac{1}{2} \rho \omega^2 x^2 ,$$

unde p_0 este dat mai sus : (4) .

La limită când începe curgerea, presiunea din lichid la marginea capilarului trebuie să fie $H + 2\sigma/r$. Prin urmare avem condiția :

$$H + 2\sigma/r = H - 2\sigma/r + \rho gh + (1/2) \rho \omega^2 \ell^2 , \quad (6)$$

de unde

$$\omega = \sqrt{2(4\sigma/r - \rho gh) : (\rho \ell^2)} = 10 \text{ rad/s} . \quad (7)$$

* *

5. DILATOMETRIE ȘI TERMOMETRIE

5.1. Dilatarea solidelor

5.1.1. Prin încălzirea unui inel de metal, grosimea lui a crescut cu $f = 0,40\%$. Cu cât la sută a crescut diametrul interior al inelului ?

Rezolvare. Prin încălzirea unui corp izotrop toate dimensiunile sale liniare cresc în aceeași proporție :

$$l_1 = l_0(1 + \alpha t_1), \quad l_2 = l_0(1 + \alpha t_2), \quad \Delta l = l_2 - l_1 = l_0\alpha(t_2 - t_1),$$
$$\Delta l = l_0\alpha\Delta t \rightarrow f = \Delta l / l_0 = \alpha\Delta t, \quad (1)$$

ceea ce rezultă și direct din definiția coeficientului de dilatare liniară : $\alpha = \Delta l / (l_0 \Delta t)$. Prin urmare, și diametrul interior al inelului crește tot cu $f = 0,40\%$.

5.1.2. O tijă s-a lungit cu $\Delta l_1 = 2,0$ mm prin încălzire cu $\Delta T_1 = 80$ K. Încălzită până la roșu, s-a lungit cu $\Delta l_2 = 12$ mm. Determinați temperatura t_2 de încălzire până la roșu .

Rezolvare. $\Delta l_1 = l_0\alpha\Delta T_1$, $\Delta l_2 = l_0\alpha\Delta T_2$, (1)

$$\Delta T_2 = \Delta T_1 \cdot \Delta l_2 / \Delta l_1 = 480 \text{ K} . \quad (2)$$

Cum temperatura camerei $t_c \approx 20^\circ\text{C}$: $t_2 = t_c + \Delta T_2 = 500^\circ\text{C}$. (3)

5.1.3. Două rigle, una de aluminiu și cealaltă de cupru, sunt așezate în paralel, cu diviziunea 0 comună. Găsiți o diviziune N_1 pe rigla de aluminiu și o diviziune N_2 pe rigla de cupru, astfel încât distanța dintre aceste diviziuni să fie $l = 14$ cm = const, independent de temperatură.

Rezolvare. Cele două diviziuni căutate $N_{1,2}$ trebuie să se deplaseze prin dilatare cu același interval, adică creșterile de lungime ale celor două porțiuni de riglă ON_1 și ON_2 trebuie să fie egale între

$$\text{ele:} \quad N_1\alpha_1\Delta T = N_2\alpha_2\Delta T \quad , \quad N_2 - N_1 = l ; \quad (1)$$

$$N_1 = l \cdot \alpha_2 / (\alpha_1 - \alpha_2) = 32 \text{ cm} , \quad N_2 = l \cdot \alpha_1 / (\alpha_1 - \alpha_2) = 46 \text{ cm} . \quad (2)$$

5.1.4. O placă bimetalică de grosime $d = 1,0 \text{ mm}$ este formată dintr-o placă de oțel și o placă de aluminiu. La temperatura camerei placa este plană. Prin încălzire cu $\Delta T = 100^\circ\text{C}$ placa se curbează. Aflați raza de curbura medie a plăcii astfel curbate.

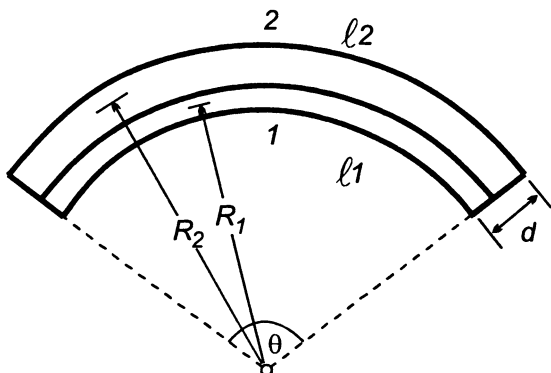


Fig.5.1.4

Rezolvare. Legea dilatării liniare dă :

$$l_1 = l (1 + \alpha_1 \Delta t), \quad l_2 = l (1 + \alpha_2 \Delta t), \quad l_2 - l_1 = l (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta t, \quad (1)$$

Pe de altă parte (θ în radiani !): $l_1 = R_1 \theta$, $l_2 = R_2 \theta$,

$$l_2 - l_1 = (R_2 - R_1) \theta = (d/2) \theta, \quad (2) \quad l (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta t = (d/2) \theta, \quad (3)$$

Raza de curbura medie se poate defini prin lungimea medie astfel :

$$\begin{aligned} (1/2) (l_1 + l_2) &= R \theta, \quad R = (1/2) (l_1 + l_2) d : [2 l (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta t] = \\ &= [2l + l (\alpha_1 + \alpha_2) \Delta t] d : [4 l (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta t] \approx \\ &\approx d : [2 (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta t] = 42 \text{ cm}, \end{aligned} \quad (4)$$

unde am neglijat termenul mic $l \alpha \Delta t \ll l$.

5.1.5. Două tije, de lungime $l = 1,00 \text{ m}$ fiecare, una de fier și una de alamă, sunt prinse la capetele lor comune. Prin încălzire cu $\Delta T = 300 \text{ K}$ tija de fier rămâne dreaptă, iar tija de alamă se curbează. Aflați unghiul la centru θ și "săgeata" f a tijej curbate.

Rezolvare. $l_1 = 2R \sin(\theta/2) = l (1 + \alpha_1 \Delta T)$, (1)

$$\begin{aligned} l_2 = R \theta &= l (1 + \alpha_2 \Delta T) \rightarrow (2/\theta) \sin(\theta/2) = \\ &= (1 + \alpha_1 \Delta T) / (1 + \alpha_2 \Delta T). \end{aligned} \quad (2)$$

Unghiul θ fiind destul de mic, putem aproxima sinusul (v. Anexe):

$$\sin x \approx x - x^3/6 + \dots \quad (3)$$

Nu ne putem opri la *prima* aproximație, de ordinul I (adică la termenul *liniar* în x), deoarece efectul "dispare" în această aproximație.

$$(2/\theta)(\theta/2 - \theta^3/48) \approx (1 + \alpha_1 \Delta T) / (1 + \alpha_2 \Delta T) \approx (1 + \alpha_1 \Delta T)(1 - \alpha_2 \Delta T) \approx 1 + (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T,$$

$$\theta = \sqrt{24(\alpha_2 - \alpha_1) \Delta T} = 0,24 \text{ rad} = 13^\circ 45' . \quad (4)$$

$$f = R - R \cos(\theta/2) = 2R \sin^2(\theta/2) \approx 2R\theta^2/16, \text{ dar } \ell \approx R\theta,$$

$$f \approx (1/8) \ell \theta = (1/4) \ell \sqrt{6(\alpha_2 - \alpha_1) \Delta T} = 3,0 \text{ cm} . \quad (5)$$

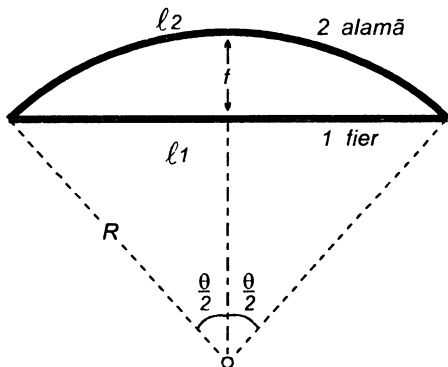


Fig.5.1.5

5.1.6. Coeficientul de dilatare liniară (mediu) se definește prin formula $\alpha = \Delta \ell : (\ell_0 \Delta T) = (\ell_2 - \ell_1) : [\ell_0 (t_2 - t_1)]$ sau $\alpha = (\ell - \ell_0) : (\ell_0 t)$, $\ell = \ell_0 (1 + \alpha t)$, (*)

unde $\ell_{1,2}$ sunt lungimile la temperaturile $t_{1,2}$, iar ℓ_0 este lungimea la temperatura de referință standard, care de obicei este 0°C . Coeficientul α , definit prin (*) reprezintă de fapt un coeficient mediat pe intervalul (t_1, t_2) , respectiv $(0, t)$.

În termotehnică, metalurgie se ia uneori temperatura de referință 100°C , 500°C sau 1000°C . Cum se scrie atunci formula dilatării liniare și cum putem atunci calcula coeficientul de dilatare corespunzător ?

Rezolvare. Notăm cu t^* noua temperatură de referință. Atunci noul coeficient de dilatare α^* se va defini prin formula :

$$\alpha^* = \Delta \ell : (\ell^* \Delta t) = (\ell_2 - \ell_1) : [\ell^* (t_2 - t_1)] \text{ sau}$$

$$\alpha^* = (\ell - \ell^*) : [\ell^* (t - t^*)] . \quad (1)$$

Din ultima expresie obținem formula dilatării :

$$\ell = \ell^* [1 + \alpha^* (t - t^*)] . \quad (2)$$

Folosind definiția coeficientului standard, din enunț, avem

$$\begin{aligned} \alpha^* &= (l_2 - l_1) : [l^*(t_2 - t_1)] = \alpha \cdot l_0 / l^* = \\ &= \alpha l_0 : [l_0(1 + \alpha t^*)] = \alpha / (1 + \alpha t^*). \end{aligned} \quad (3)$$

De exemplu, pentru fier $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\alpha_{100} = \alpha / (1 + \alpha \cdot 100) = 11,98 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\alpha_{1000} = 11,85 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$,

deci corecțiile sunt **foarte mici**. Aceasta justifică folosirea formulei

$$l_{\text{final}} = l_{\text{ini} \cdot \text{ial}} [1 + \alpha(t_{\text{final}} - t_{\text{ini} \cdot \text{ial}})] \quad \text{sau} \quad l_2 = l_1(1 + \alpha \Delta t), \quad (5)$$

unde α este cel *standard*.

5.1.7. Cum variază cu temperatura perioada micilor oscilații ale unui pendul simplu gravitațional? Imaginați o suspensie a bilei pendulului, astfel ca perioada să nu varieze cu temperatura.

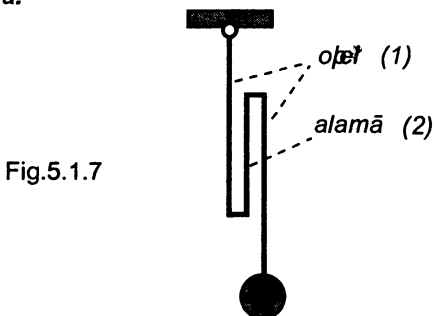


Fig.5.1.7

$$\begin{aligned} \text{Rezolvare. } T &= 2\pi\sqrt{l/g} = 2\pi\sqrt{l_0(1 + \alpha t)/g} = \\ &= 2\pi\sqrt{l_0/g} \sqrt{1 + \alpha t} = T_0 \sqrt{1 + \alpha t} \approx T_0 \left(1 + \frac{\alpha}{2} t\right), \end{aligned} \quad (1)$$

unde T_0 este perioada pendulului la 0°C și unde am aproximat radicalul, conform formulei cunoscute (v. Anexe):

$$(1 + x)^r \approx 1 + rx, \quad \text{dacă } |x| \ll 1; \quad r \in \mathbf{R} \quad (2)$$

(la noi $x = \alpha t$ și $r = 1/2$).

Pentru ca perioada să nu varieze cu temperatura, tija de suspensie trebuie confecționată din două metale diferite, de exemplu, din alamă și oțel, ca în figură. Atunci alungirile trebuie să se compenseze:

$$\Delta l = l_1 \alpha_1 \Delta t = l_2 \alpha_2 \Delta t \rightarrow l_1 / l_2 = \alpha_2 / \alpha_1, \quad (3)$$

unde $l_{1,2}$ sunt lungimile totale ale celor două porțiuni, din oțel (1) și respectiv din alamă (2). Desigur lungimea *rezultantă* a tije de suspensie trebuie să asigure perioada T dorită (pentru $T=1,0$ s avem $l \approx 0,25$ m; pentru $T=2,0$ s avem $l \approx 1,00$ m).

5.1.8. Cum variază cu temperatura momentul de inerție al unui corp solid ? Cum variază cu temperatura perioada de oscilație a unui pendul fizic ?

Rezolvare. Momentul de inerție al unui corp față de o axă este o mărime aditivă, egală cu suma momentelor de inerție ale particulelor componente :

$$I = \sum I_k = \sum_{k=1}^N m_k R_k^2, \quad (1)$$

unde m_k este masa particulei de indice k și R_k - distanța sa până la axă, momentul de inerție a unei particule fiind $m_k R_k^2$.

Datorită dilatării:

$$\begin{aligned} I &= \sum m_k R_k^2 = \sum m_k R_{ok}^2 (1 + \alpha t)^2 = \\ &= I_o (1 + \alpha t)^2 \approx I_o (1 + 2\alpha t), \end{aligned} \quad (2)$$

unde I_o este momentul de inerție la 0°C .

Perioada micilor oscilații ale unui pendul fizic este

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgR_{cm}}}, \quad (3)$$

unde I este momentul de inerție al corpului față de axa de oscilație, iar R_{cm} - distanța centrului de masă până la axa de oscilație.

Datorită dilatării :

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{I_o (1 + \alpha t)^2}{mgR_{ocm} (1 + \alpha t)}} = T_o \sqrt{1 + \alpha t}, \\ T &\approx T_o [1 + (\alpha/2) t], \end{aligned} \quad (4)$$

unde T_o este perioada micilor oscilații la 0°C . Variația cu temperatura este la fel ca la pendulul simplu gravitațional .

5.1.9. Evaluați timpul cu care avansează sau întârzie în $D = 24$ h un ceasornic cu pendul, datorită schimbării temperaturii din cameră .

Rezolvare. Fie T^* , t^* perioada și temperatura pentru care ceasornicul merge exact, iar T - perioada la temperatura t . Atunci în $D = 24$ h ceasornicul face $N = D / T$ oscilații, iar fiecare oscilație deplasează acul indicator al cadranelui cu T^* ! (adică fiecare oscilație, indiferent de durata ei, ceasornicul o înregistrează ca fiind T^*). Deci timpul înregistrat în $D = 24$ h va fi

$$D + \Delta\tau = N T^* = D T^* / T \text{ sau } (D + \Delta\tau) / D = T^* / T, \quad (1)$$

raportul timpilor înregistrați este egal cu raportul invers al perioadelor (sau timpul înregistrat este *invers proporțional* cu perioada). Dar perioada variază cu temperatura după formula (v. problema precedentă 5.1.8):

$$T = T^*[1 + (\alpha/2)(t - t^*)] = T^*[1 + (\alpha/2)\Delta t], \quad (2)$$

$$\Delta\tau = -D(T - T^*)/T = -(\alpha/2)\Delta t : [1 + (\alpha/2)\Delta t] \approx \\ \approx -(1/2)D\alpha\Delta t = -(1/2)D\alpha(t - t^*), \quad (3)$$

deci la o creștere a temperaturii, $t > t^*$, ceasornicul întârzie:

$$\Delta\tau = -(1/2) \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} \cdot 20 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1} \cdot 5 \text{ K} \approx -5 \text{ s}. \quad (4)$$

5.1.10. Un ceasornic cu pendul întârzie cu $\tau_1 = 3,0 \text{ s}$ în $D = 24 \text{ h}$ la temperatura $t_1 = 26^\circ\text{C}$ și înaintează cu $\tau_2 = 9,0 \text{ s}$ în $D = 24 \text{ h}$ la temperatura $t_2 = 6,0^\circ\text{C}$. Aflați coeficientul de dilatare liniară α al materialului pendulului, precum și temperatura θ la care ceasornicul merge exact.

Rezolvare. Vom folosi rezultatul de la problema precedentă 5.1.9:

$$-\tau_1 = -(1/2)D\alpha(t_1 - \theta), \quad \tau_2 = -(1/2)D\alpha(t_2 - \theta). \quad (1)$$

Din aceste două ecuații rezultă:

$$\alpha = [2/(t_1 - t_2)(\tau_1 + \tau_2)]/D = 13,9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}, \quad (2)$$

$$\theta = (\tau_1 t_2 + \tau_2 t_1)/(\tau_1 + \tau_2) = 21^\circ\text{C}. \quad (3)$$

5.1.11. Din cuarț cristalin se taie, într-un plan paralel cu axa sa de simetrie, o placă rotundă de rază $R = 30 \text{ mm}$ la temperatura $t_1 = 20^\circ\text{C}$. Cu cât va crește aria plăcii atunci când este încălzită până la temperatura $t_2 = 100^\circ\text{C}$?

Rezolvare. Cristalele se dilată diferit după diferite axe cristalografice de simetrie (cristalele sunt *anizotrope*). În planul plăcii tăiate pe direcția axei cristalografice de simetrie coeficientul de dilatare este $\alpha_{\parallel} = 7,5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, iar pe direcție perpendiculară $\alpha_{\perp} = 13,7 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. Prin încălzire placa rotundă devine *eliptică*, cu axa mică paralelă cu axa cristalografică și cu axa mare perpendiculară pe axa cristalografică. Aria elipsei este πab , unde a, b sunt semiaxele elipsei. În cazul nostru:

$$S = \pi \cdot R(1 + \alpha_{\parallel}\Delta t) \cdot R(1 + \alpha_{\perp}\Delta t) \approx \pi R^2 [1 + (\alpha_{\parallel} + \alpha_{\perp})\Delta t],$$

$$\Delta S = S - \pi R^2 = \pi R^2 (\alpha_{\parallel} + \alpha_{\perp}) \Delta t = 4,8 \text{ mm}^2.$$

5.1.12. Două tije au la temperatura $t_1 = 10^\circ\text{C}$ lungimi egale, iar la temperatura $t_3 = 20^\circ\text{C}$ au volume egale. La ce temperatu-

ră t_2 secțiunile lor transversale vor fi egale ? Arătați că t_3 este cuprins între t_1 și t_2 .

Rezolvare. Fie ℓ lungimea tijelor și S' , S'' secțiunile tijelor la temperatura t_1 , atunci încălzind tijele de la t_1 la t_2 se egalează ariile:

$$S' [1 + 2\alpha_1(t_2 - t_1)] = S'' [1 + 2\alpha_2(t_2 - t_1)], \quad (1)$$

iar la temperatura t_3 se egalează volumele :

$$(\ell S') [1 + 3\alpha_1(t_3 - t_1)] = (\ell S'') [1 + 3\alpha_2(t_3 - t_1)]. \quad (2)$$

Împărțind ecuațiile membru la membru, obținem :

$[1 + 2\alpha_1(t_2 - t_1)] : [1 + 3\alpha_1(t_3 - t_1)] = [1 + 2\alpha_2(t_2 - t_1)] : [1 + 3\alpha_2(t_3 - t_1)]$
sau înmulțind mezii între ei și neglijând termenii pătratici (care sunt de ordinul 2 de micime) :

$$1 + 2\alpha_1(t_2 - t_1) + 3\alpha_2(t_3 - t_1) = 1 + 2\alpha_2(t_2 - t_1) + 3\alpha_1(t_3 - t_1),$$

$$\alpha_1(2t_2 - 2t_1 - 3t_3 + 3t_1) = \alpha_2(2t_2 - 2t_1 - 3t_3 + 3t_1),$$

de unde rezultă obligatoriu $2t_2 - 3t_3 + t_1 = 0$,

$$t_2 = (3t_3 - t_1) / 2 = 25^\circ\text{C} \text{ sau } T_2 = (3T_3 - T_1) / 2. \quad (3)$$

$$\text{Scriind } t_3 = (t_1 + 2t_2) / 3 \rightarrow t_3 \in (t_1, t_2). \quad (4)$$

5.1.13. Din cuarț cristalin se taie un cilindru cu axă paralelă cu axa cristalografică a cuarțului. La temperatura $t_1 = 18^\circ\text{C}$ raza cilindrului este $R = 1,0$ cm și înălțimea $h = 3,0$ cm. Calculați creșterea de volum a cilindrului dacă este încălzit până la temperatura $t_2 = 200^\circ\text{C}$.

Rezolvare. Cristalele se dilată diferit după diferite axe cristalografice. Cuarțul are o axă cristalografică de simetrie după care

$\alpha_{\parallel} = 7,5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. iar după orice direcție transversală $\alpha_{\perp} =$

$= 13,7 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. Atunci volumul se dilată după legea :

$$\begin{aligned} V &= a b c = a_0(1 + \alpha_{\parallel} t) \cdot b_0(1 + \alpha_{\perp} t) \cdot c_0(1 + \alpha_{\perp} t) = \\ &= V_0 [1 + (\alpha_{\parallel} + 2 \alpha_{\perp}) t], \end{aligned} \quad (1)$$

unde am neglijat ca de obicei termenii pătratici și cubici în αt .

$$\Delta V = V_2 - V_1 = V_0 (\alpha_{\parallel} + 2 \alpha_{\perp}) (t_2 - t_1) = V_0 (\alpha_{\parallel} + 2 \alpha_{\perp}) \Delta t, \quad (2)$$

$$\Delta V = \pi R^2 h (\alpha_{\parallel} + 2 \alpha_{\perp}) (t_2 - t_1) = 60 \text{ mm}^3. \quad (3)$$

**** 5.1.14. Temperatura unei bare omogene și uniforme variază liniar de la un capăt t_1 , la altul t_2 . Aflați lungimea barei, dacă la $0,0^\circ\text{C}$ lungimea este ℓ_0 și coeficientul de dilatare liniară este α .**

Rezolvare. $t = t_1 + bx$, dar $t_2 = t_1 + b \ell$, de unde

$$b = (t_2 - t_1) / \ell, \quad t = t_1 + (t_2 - t_1)x / \ell. \quad (1)$$

Luăm un *element* de bară de lungime dx situat la distanța x , unde temperatura este t , atunci

$$dx = dx_0(1 + \alpha t) = dx_0\{1 + \alpha[t_1 + (t_2 - t_1)x / \ell]\}. \quad (2)$$

Separăm variabilele și integrăm :

$$\int_0^{\ell_0} dx_0 = \int_0^{\ell} \frac{dx}{1 + \alpha[t_1 + (t_2 - t_1)x / \ell]},$$

ceea ce dă respectiv

$$\ell_0 = \frac{1}{\alpha(t_2 - t_1) / \ell} \ln \frac{1 + \alpha[t_1 + (t_2 - t_1)\ell / \ell]}{1 + \alpha t_1} = \frac{\ell}{\alpha(t_2 - t_1)} \ln \frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1},$$

de unde

$$\ell = \ell_0 \alpha (t_2 - t_1) : \ln [(1 + \alpha t_2) / (1 + \alpha t_1)]. \quad (3)$$

Considerând $\alpha t \ll 1$, putem aproxima logaritmul după formula (v. Anexe) :

$$\ln(1 + x) = x - x^2/2 + \dots \cong x - x^2/2, \text{ dacă } |x| \ll 1. \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \ln [(1 + \alpha t_2) / (1 + \alpha t_1)] &= \ln(1 + \alpha t_2) - \ln(1 + \alpha t_1) = \\ &= \alpha(t_2 - t_1) - (1/2) \alpha^2(t_2^2 - t_1^2), \end{aligned}$$

trebuie mers până la aproximația de ordinul 2 în αt , căci în aproximația de ordinul 1 dilatarea "dispare" ! .

$$\begin{aligned} \ell &= \ell_0 \alpha (t_2 - t_1) : \{ \alpha(t_2 - t_1)[1 - (1/2) \alpha(t_2 + t_1)] \} = \\ &= \ell_0 : [1 - (1/2) \alpha(t_2 + t_1)] \approx \ell_0 [1 + (1/2) \alpha(t_1 + t_2)], \end{aligned} \quad (5)$$

ca și cum temperatura de încălzire ar fi *medie aritmetică* .

* *

5.2. Dilatarea lichidelor

5.2.1. Într-un vas de cuarț de volum $V = 2,8$ L este așezat un corp de alamă de masă $m = 8,5$ kg, restul vasului fiind umplut cu apă. S-a observat că prin încălzire cu $\Delta t = 3,0$ K, nivelul apei din vas nu s-a schimbat. Aflați coeficientul mediu de dilatare al apei în acest interval de temperatură .

Rezolvare. Creșterile de volum sunt legate între ele prin relația :

$$\Delta V_{\text{vas}} = \Delta V_{\text{alamă}} + \Delta V_{\text{apă}} . \quad (1)$$

$$\Delta V_{\text{vas}} = 3\alpha_c \Delta t ; \Delta V_{\text{al.}} = (m / \rho) 3\alpha_{\text{al.}} \Delta t ; \Delta V_{\text{apă}} = (V - m / \rho) \beta \Delta t . \quad (2)$$

Introducând (2) în (1), găsim :

$$\beta = (V 3\alpha_c - 3\alpha_{\text{al.}} m / \rho) : (V - m / \rho) = - 3,1 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} . \quad (3)$$

Valoarea negativă a coeficientului de dilatare înseamnă că încălzirea a avut loc între 0°C și 4°C când apa se contractă, în loc să se dilate (**anomalia dilatării apei**).

5.2.2. Pentru măsurarea coeficientului de dilatare al sticlei s-a luat un vas din această sticlă, de volum $V = 200$ cm³, s-a umplut până la refuz cu mercur la 0°C (în gheață care se topește), apoi s-a încălzit până la $t = 100$ °C (apa care fierbe). Din vas au curs afară $\Delta V = 3,0$ cm³ de mercur. Aflați coeficientul de dilatare liniară al sticlei.

Rezolvare. Din legea dilatării aparente avem :

$$\Delta V = V_{\text{ap}} t = V(\beta - 3\alpha) t , \quad \alpha = \beta / 3 - \Delta V / (3Vt) = 10 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1} .$$

5.2.3. Pentru determinarea coeficientului de dilatare al alcoolului etilic s-au luat doi cilindri gradați identici și s-au umplut la 0°C , unul cu apă ($\beta = 35 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$) de volum $V = 500$ cm³ și celălalt cu alcool etilic de volum $V' = 485$ cm³. Încălzind în aceeași baie de apă de la 0°C la $t = 40^\circ\text{C}$, volumele celor două lichide s-au egalat. Aflați coeficientul de dilatare (absolută) al alcoolului etilic.

Rezolvare. Legea dilatării aparente dă condiția :

$$V [1 + (\beta - 3\alpha) t] = V' [1 + (\beta' - 3\alpha) t] ,$$

$$\beta' = \beta V / V' + [(V - V') / (V' t)] (1 - 3\alpha t) . \quad (1)$$

Neglijând termenii superiori (pătratici) în coeficienții de dilatare, putem scrie aproximativ: $\beta' \approx \beta + (V - V') / (Vt) = 11 \cdot 10^{-1} \text{ K}^{-1}$. (2)
 Într-adevăr, V , V' diferă între ei prin mărimi mici de ordinul 1, care apar înmulțite cu β sau cu α și dau mărimi mici de ordinul 2, neglijabile.

5.2.4. Ce înălțime h trebuie să aibă coloana de mercur dintr-o eprubetă de lungime $\ell = 20$ cm, pentru ca volumul liber al eprubetei de deasupra mercurului să nu varieze cu temperatura ?

Rezolvare. Punem condiția de egalitate a volumelor de deasupra mercurului la două temperaturi oarecare $t_{1,2}$:

$$S_0 \ell_0 (1 + 3\alpha t_1) - S_0 h_0 (1 + \beta t_1) = S_0 \ell_0 (1 + 3\alpha t_2) - S_0 h_0 (1 + \beta t_2) \quad (1)$$

$$\ell_0 3\alpha = h_0 \beta \quad \text{sau} \quad h = \ell \cdot 3\alpha / \beta = 3,0 \text{ cm} \quad (2)$$

(puteam scrie, mai simplu, egalitatea volumelor la 0°C și o temperatură oarecare). Condiția evidentă $h < \ell$ poate fi întotdeauna îndeplinită pentru orice sort de sticlă și orice lichid, deoarece $3\alpha < \beta$, adică *solidele se dilată mai puțin decât lichidele*.

5.2.5. Nivelul electrolitului într-un vas de sticlă prismatic de înălțime $h = 20$ cm este cu $\Delta h = 2,0$ mm sub orificiul din capac. Încălzind vasul cu $\Delta t = 25$ K, s-a observat că electrolitul începe să curgă. Aflați coeficientul de dilatare al electrolitului.

Rezolvare. Prin încălzire cu Δt volumul vasului devine egal cu volumul electrolitului : $S h (1 + 3\alpha \Delta t) = S (h - \Delta h) (1 + \beta \Delta t)$, (1)

$$\beta = (3\alpha h \Delta t + \Delta h) : [(h - \Delta h) \Delta t] \approx 3\alpha + \Delta h / (h \Delta t) = 4,3 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}, \quad (2)$$

unde am neglijat la numitor $\Delta h \ll h$.

5.2.6. Un vas cilindric este umplut cu un lichid. Cum variază înălțimea coloanei de lichid cu temperatura ? Cu cât la sută (f) crește această înălțime în cazul unui vas de sticlă cu mercur, dacă vasul este încălzit cu $\Delta t = 65^\circ\text{C}$?

Rezolvare. $h = V / S = V_0 (1 + \beta t) : [S_0 (1 + 2\alpha t)] \approx$
 $\approx h_0 [1 + (\beta - 2\alpha)t]$, (1)

$$\Delta h = h_0 (\beta - 2\alpha) \Delta t, \quad f = \Delta h / h = (\beta - 2\alpha) \Delta t = 1,0 \% . \quad (2)$$

5.2.7. Pentru determinarea coeficientului de dilatare β al unui lichid se poate folosi un picnometru (flaconaș cu dop, prevăzut cu un capilar pentru scurgerea surplusului de lichid, v. figura). Se cântărește picnometrul gol. Se umple până la refuz cu lichidul de studiat, la temperatura t_1 , se cântărește

din nou și prin diferență se află masa m_1 a lichidului. Se încălzește până la temperatura t_2 ; atunci o parte din lichid se scurge. Se cântărește din nou și se află masa m_2 a lichidului rămas. Cunoscând coeficientul de dilatare liniară α al sticlei picnometrului, aflați coeficientul de dilatare β al lichidului studiat.

Aplicație : $t_1 = 0,0^\circ\text{C}$, $t_2 = 100^\circ\text{C}$, $m_1 = 100$ g , $m_2 = 95$ g ,
lichidul : glicerina .

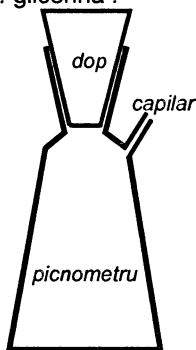


Fig.5.2.7

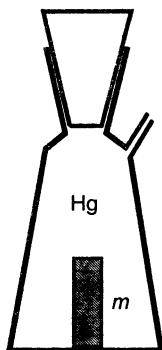


Fig.5.2.10

Rezolvare. Masa de lichid $m = \rho_{\text{lichid}} V_{\text{vas}}$ la temperaturile $t_{1,2}$

este :

$$m_1 = [\rho_0 / (1 + \beta t_1)] V_0 (1 + 3\alpha t_1) ,$$

$$m_2 = [\rho_0 / (1 + \beta t_2)] V_0 (1 + 3\alpha t_2) , \quad (1)$$

$$m_2 / m_1 = [(1 + \beta t_1) / (1 + \beta t_2)] (1 + 3\alpha t_2) / (1 + 3\alpha t_1) \approx$$

$$\approx [(1 + \beta t_1) / (1 + \beta t_2)] [1 + 3\alpha(t_2 - t_1)] \approx$$

$$\approx [1 + \beta t_1 + 3\alpha(t_2 - t_1)] : (1 + \beta t_2) , \quad (2)$$

$$\beta = 3\alpha \cdot m_1(t_2 - t_1) : (m_2 t_2 - m_1 t_1) + (m_1 - m_2) : (m_2 t_2 - m_1 t_1) . \quad (3)$$

Neglijând în (2) termenii pătratici în βt obținem mai simplu :

$$\beta = 3\alpha + (m_1 - m_2) : [m_1(t_2 - t_1)] = 52,7 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} , \quad (4)$$

unde $t_{1,2}$ nu mai apar separat, ci în diferența Δt .

5.2.8. Coeficientul de dilatare al mercurului este bine cunoscut: $\beta = 18,18 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} \approx 18 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ (cu o precizie de 2 ‰) și poate fi folosit pentru determinarea coeficientului de dilatare al diverselor sorturi de sticlă . De exemplu, pentru determinarea coeficientului de dilatare liniară α al unui sort de sticlă, se umple un balon confecționat din această sticlă (balon prevăzut cu un capilar pentru scurgerea surplusului de

mercur , de exemplu, de tipul picnometrului, v. fig.5.2.7) cu mercur, la două temperaturi $t_1 = 20^\circ\text{C}$ respectiv $t_2 = 100^\circ\text{C}$ și prin cântăriri adecvate (scăzând masa balonului gol) se găsește masa mercurului introdus, $m_1 = 250$ g, respectiv $m_2 = 247$ g. Aflați coeficientul de dilatare liniară α al sticlei .

Rezolvare. Folosind rezultatele de la problema precedentă, avem $3\alpha = \beta (m_2 t_2 - m_1 t_1) : [m_1(t_2 - t_1)] - (m_1 - m_2) : [m_1(t_2 - t_1)] \approx \beta - (m_1 - m_2) : [m_1(t_2 - t_1)]$, (1)

$$\alpha = \beta / 3 - (m_1 - m_2) : [3m_1(t_2 - t_1)] = 10 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1} . \quad (2)$$

5.2.9. Pentru a determina coeficientul de dilatare β al unui lichid (alcool metilic) s-a procedat astfel. O bilă din material cunoscut (de exemplu, sticlă) cu coeficientul de dilatare liniară $\alpha = 9,0 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, se introduce într-un picnometru plin cu lichidul respectiv, la temperaturile $t_1 = 0,0^\circ\text{C}$, respectiv $t_2 = 50^\circ\text{C}$ și se cântărește masa de lichid dezlocuită $m_1 = 100$ g, respectiv $m_2 = 94$ g. Aflați coeficientul de dilatare β al lichidului.

Rezolvare. Masa de lichid dezlocuită $m = \rho_{\text{lichid}} V_{\text{bilă}}$. Analog problemei 5.2.7: $m_1 = [\rho_0 / (1 + \beta t_1)] V_0 (1 + 3\alpha t_1)$,

$$m_2 = [\rho_0 / (1 + \beta t_2)] V_0 (1 + 3\alpha t_2) , \quad (1)$$

$$\begin{aligned} m_2 / m_1 &= [(1 + \beta t_1) / (1 + \beta t_2)] [(1 + 3\alpha t_2) / (1 + 3\alpha t_1)] \approx \\ &\approx [(1 + \beta t_1) / (1 + \beta t_2)] [1 + 3\alpha(t_2 - t_1)] , \\ &\approx [1 + \beta t_1 + 3\alpha(t_2 - t_1)] : (1 + \beta t_2) , \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \beta &= 3\alpha \cdot m_1(t_2 - t_1) : (m_2 t_2 - m_1 t_1) + (m_1 - m_2) : (m_2 t_2 - m_1 t_1) \approx \\ &\approx 3\alpha + (m_1 - m_2) : [m_1(t_2 - t_1)] = 120 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} . \end{aligned} \quad (3)$$

5.2.10. Pentru determinarea coeficientului de dilatare γ al unui metal de densitate cunoscută ρ , s-a luat o masă m de metal, s-a introdus într-un balon-picnometru (prevăzut cu un capilar pentru scurgere), s-a umplut apoi balonul până la refuz cu mercur la temperaturile cunoscute $t_{1,2}$ și s-au măsurat masele de mercur introduse m_1 , respectiv m_2 (prin cântăriri adecvate). Știind densitatea mercurului $\rho_{\text{Hg}} = 13,6 \text{ g/cm}^3$ la 0°C , coeficientul său de dilatare $\beta_{\text{Hg}} = 18 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ și coeficientul de dilatare liniară al sticlei $\alpha_{\text{st.}} = 9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, aflați coeficientul de dilatare γ al metalului studiat.

Aplicație : *alama cu* $\rho = 8,4 \text{ g/cm}^3$, $m = 84 \text{ g}$, $t_1 = 0,0^\circ\text{C}$,
 $t_2 = 100^\circ\text{C}$, $m_1 = 680 \text{ g}$, $m_2 = 669,5 \text{ g}$.

Rezolvare. Scriem $V_{\text{balon}} = V_{\text{metal}} + V_{\text{Hg}}$ la temperaturile $t_{1,2}$:

$$V_1 = m / \rho_1 + (m_1 / \rho_{\text{OHg}}) (1 + \beta_{\text{Hg}} t_1) , \quad (1)$$

$$V_1(1 + 3\alpha_{\text{st}} \Delta t) = (m / \rho_1) (1 + \gamma \Delta t) + (m_2 / \rho_{\text{OHg}}) (1 + \beta_{\text{Hg}} t_2) . \quad (2)$$

Prin eliminarea volumului V_1 al balonului, obținem :

$$\gamma = 3\alpha_{\text{st}} [1 + (m_1 / m) (\rho_1 / \rho_{\text{OHg}}) + \{(m_1 - m_2) : [m(t_2 - t_1)]\} (\rho_1 / \rho_{\text{OHg}}) - \beta_{\text{Hg}} [(m_2 t_2 - m_1 t_1) : m (t_2 - t_1)] (\rho_1 / \rho_{\text{OHg}}) . \quad (3)$$

Neglijând termenii pătratici, în $\alpha\beta$ și β^2 , ultimul termen se simplifică și relația se poate scrie mai simplu :

$$\gamma \approx 3\alpha_{\text{st}} [1 + (m_1 / m) (\rho / \rho_{\text{Hg}}) + \{(m_1 - m_2) : [m(t_2 - t_1)]\} (\rho / \rho_{\text{Hg}}) - \beta_{\text{Hg}} (m_2 / m) (\rho / \rho_{\text{Hg}}) = 49 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1} . \quad (4)$$

5.2.11. Un vas de sticlă conține, la o anumită temperatură, o masă $m_1 = 90 \text{ g}$ de aluminiu (1) și o masă $m_2 = 80 \text{ g}$ petrol (2), astfel încât vasul este plin. Aflați masa de petrol care iese afară din vas dacă acesta este încălzit cu $\Delta t = 100 \text{ K}$.

Rezolvare. Avem la temperatura t_1 , respectiv t_2 ,

$$V_1 = m_1 / \rho_1 + m_2 / \rho_2 ; \quad V_1(1 + 3\alpha \Delta t) =$$

$$= (m_1 / \rho_1) (1 + \gamma_1 \Delta t) + [(m_2 - \Delta m) / \rho_2] (1 + \beta_2 t_2) : (1 + \beta_2 t_1) , \quad (1)$$

de unde, eliminând volumul V_1 și neglijând termenii pătratici, în $\alpha\beta$ și în $\gamma\beta$, obținem :

$$\Delta m \approx [\rho_2 \Delta t : (1 + \beta_2 t_2)] [(m_1 / \rho_1) (\gamma_1 - 3\alpha) + (m_2 / \rho_2) (\beta_2 - 3\alpha)] . \quad (2)$$

Dacă neglijăm și $\beta_2 t_2 \ll 1$ de la numitor, obținem în aproximația liniară :

$$\Delta m \approx \rho_2 \Delta t [(m_1 / \rho_1) (\gamma_1 - 3\alpha) + (m_2 / \rho_2) (\beta_2 - 3\alpha)] = 63,1 \text{ g} , \quad (3)$$

unde în aproximația noastră densitățile $\rho_{1,2}$ pot fi luate la oricare temperatură din intervalul studiat .

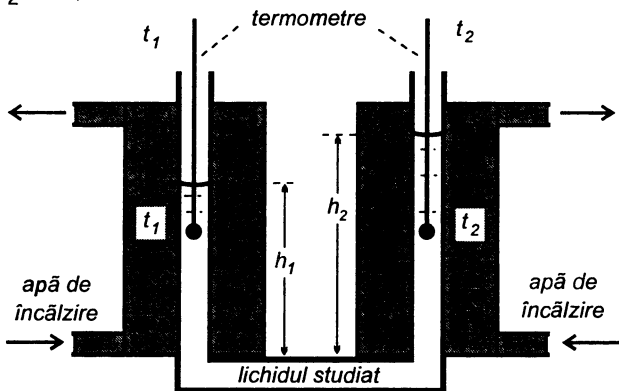
5.2.12. Pentru măsurarea coeficientului de dilatare absolută β al unui lichid se poate folosi metoda lui Dulong și Petit.

Un tub în formă de U este umplut cu lichidul studiat. Cele două ramuri sunt menținute la temperaturile $t_{1,2}$. Se măsoară înălțimile $h_{1,2}$ ale coloanelor de lichid de la nivelul comun (v.fig.).

Exprimați coeficientul de dilatare (absolută) β al lichidului.

Aplicație : ulei de transformator , $t_1 = 20^\circ\text{C}$, $t_2 = 70^\circ\text{C}$, $h_1 = 40\text{ cm}$, $h_2 = 41,2\text{ cm}$.

Fig.5.2.12



Rezolvare. Scriem condiția de egalitate a presiunilor la nivelul comun inferior (în baza *principiului vaselor comunicante* : într-un plan orizontal dus prin același lichid (deci inclusiv aceeași densitate sau temperatură) în vase comunicante presiunea este aceeași):

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 \quad \text{sau} \quad \rho_0 h_1 / (1 + \beta t_1) = \rho_0 h_2 / (1 + \beta t_2), \quad (1)$$

$$\beta = (h_2 - h_1) : (h_1 t_2 - h_2 t_1). \quad (2)$$

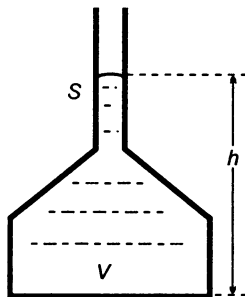
Neglijând termenii pătratici în βt se poate scrie și mai simplu :

$$\beta \approx (h_2 - h_1) : [h_1(t_2 - t_1)] = (h_2 - h_1) : (h_1 \Delta t) = 60 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}, \quad (3)$$

unde apare **diferența** de temperatură Δt .

5.2.13. Un balon de sticlă este umplut cu mercur, ca în figură. Volumul mercurului $V = 0,50\text{ L}$, înălțimea nivelului $h = 10\text{ cm}$. Secțiunea gâtului cilindric $S = 1,0\text{ cm}^2$. Calculați creșterea de presiune Δp pe fundul vasului, dacă sistemul este încălzit cu $\Delta t = 40^\circ\text{C}$.

Fig.5.2.13



$$\text{Rezolvare. } \rho_1 = \rho_1 g h_1, \quad \rho_2 = \rho_2 g h_2, \quad (1)$$

$$\text{dar } \rho_2 \cong \rho_1(1 - \beta \Delta t), \quad h_2 = h_1 + \Delta V_{ap} / S \approx h_1 + V(\beta - 3\alpha) \Delta t / S, \quad (2)$$

unde am neglijat termenii pătratici, în $\beta^2 t^2$ și în $\alpha t \beta t$.

$$\begin{aligned} \rho_2 &\cong \rho_1(1 - \beta \Delta t) g [h_1 + V(\beta - 3\alpha) \Delta t / S] \approx \\ &\approx \rho_1 g h_1 + \rho_1 g \Delta t [-h_1 \beta + V(\beta - 3\alpha) / S], \end{aligned} \quad (3)$$

$$\Delta p = \rho_2 - \rho_1 \approx \rho g \Delta t [V(\beta - 3\alpha) / S - h_1 \beta] = 30 \text{ torr} = 4,0 \text{ kPa}. \quad (4)$$

Am neglijat iarăși termenii mici de ordinul 2 de micime.

5.2.14. Înălțimea coloanei de mercur într-un barometru are valoarea $B = 764,8$ mm la temperatura camerei $t = 20^\circ\text{C}$, fiind măsurată cu o riglă, care a fost etalonată la $0,0^\circ\text{C}$. Considerând câmpul gravitațional egal, practic, cu cel normal (standard), aflați presiunea atmosferică exprimată în torri (mm Hg).

Rezolvare. Torrul sau mm Hg este unitatea de presiune egală cu presiunea exercitată de o coloană de mercur înaltă de 1,00 mm, la temperatura de $0,0^\circ\text{C}$ și în câmp gravitațional normal $g_n = 9,80665 \text{ m/s}^2$.

Dacă coloana de mercur din barometru se află la 0°C și câmpul gravitațional este *normal*, atunci lungimea coloanei măsurată în mm reprezintă chiar presiunea atmosferică exprimată în mm Hg \equiv torr. Altfel, înălțimea barometrică B citită în mm trebuie corectată pentru a da presiunea în mmHg :

$$B_{[\text{mm}]} \rho g = H_{[\text{torr}]} \rho_0 g_n, \quad H_{[\text{torr}]} = B_{[\text{mm}]} (\rho / \rho_0) (g / g_n). \quad (1)$$

În cazul nostru trebuie făcută corecția de temperatură atât pentru citirea cu rigla, cât și pentru temperatura *nestandard* a mercurului. Dacă rigla este gradată la 0°C , atunci citirile sunt mai mici decât în realitate, din cauza dilatării riglei :

$$B_{\text{real}} = B_{\text{citit}}(1 + \alpha t). \quad (2)$$

$$\text{Densitatea variază cu temperatura după legea } \rho = \rho_0 / (1 + \beta t), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{astfel încât : } H_{[\text{torr}]} &= B_{\text{cit.}[\text{mm}]} [(1 + \alpha t) / (1 + \beta t)] g / g_n \approx \\ &\approx B_{\text{cit.}[\text{mm}]} [1 + (\alpha - \beta)t] = 762,3 \text{ torr}. \end{aligned} \quad (4)$$

Corecția de temperatură este de ordinul a 2... 3 mm Hg.

5.2.15. Un corp care plutește pe un lichid este încălzit împreună cu lichidul. Se va cufunda sau se va ridica corpul în timpul încălzirii ?

Rezolvare. Datorită dilatării corpului volumul dezlocuit și deci greutatea volumului respectiv de fluid vor crește cu fracțiunea

$\Delta V_c / V_c = 3\alpha\Delta t$. În același timp însă, greutatea volumului de lichid dezlocuit va scădea cu fracțiunea $-\Delta\rho_l / \rho_l = \beta\Delta t$, datorită micșorării densității lichidului. Cum totdeauna *lichidele se dilată mai mult decât solidele*, $\beta_{\text{lich}} > 3\alpha_{\text{solid}}$, rezultă că corpul se va *cufunda* pentru a dezlocui un volum mai mare de lichid, necesar plutirii.

5.2.16. O bucată de cupru este cufundată în apă. Cu cât la sută crește forța arhimedică asupra bucății de cupru, dacă sistemul este încălzit cu $\Delta t = 50^\circ\text{C}$?

Rezolvare. $F_A = \rho_{\text{ap}} V_{\text{Cu}} g$, (1)

$$\begin{aligned} (F_{A2} - F_{A1}) / F_{A1} &= (\rho_2 V_2 - \rho_1 V_1) / (\rho_1 V_1) = \rho_2 V_2 / (\rho_1 V_1) - 1 = \\ &= [(1 + \beta t_1) / (1 + \beta t_2)] (1 + 3\alpha t_2) / (1 + 3\alpha t_1) - 1 \approx \\ &\approx [(1 + \beta t_1) / (1 + \beta t_2)] (1 + 3\alpha\Delta t) - 1 \approx \\ &\approx (3\alpha - \beta) \Delta t : (1 + \beta t_2) \approx -(\beta - 3\alpha) \Delta t = -2,0\% , \end{aligned} \quad (2)$$

forța arhimedică scade.

5.2.17. Pentru a determina coeficientul de dilatare al unui metal (zinc), el este cufundat în toluen de coeficient de dilatare β cunoscut. Se constată că greutatea sa a scăzut cu $F_1 =$

$= 1,00 \text{ N}$ la temperatura $t_1 = 20^\circ\text{C}$ și cu $F_2 = 0,95 \text{ N}$ la temperatura $t_2 = 70^\circ\text{C}$. Aflați coeficientul de dilatare liniară al metalului.

Rezolvare. Greutatea corpului cufundat scade datorită forței arhimedice, care la cele două temperaturi este :

$$\begin{aligned} F_1 &= [\rho_0 / (1 + \beta t_1)] V_0 (1 + 3\alpha t_1) g , \\ F_2 &= [\rho_0 / (1 + \beta t_2)] V_0 (1 + 3\alpha t_2) g , \end{aligned} \quad (1)$$

$$F_2 / F_1 = [(1 + \beta t_1) / (1 + \beta t_2)] [(1 + 3\alpha t_2) / (1 + 3\alpha t_1)] \rightarrow$$

$$\begin{aligned} 3\alpha &= (1/\Delta t) [(F_2 / F_1) (1 + \beta t_2) / (1 + \beta t_1) - 1] \approx \\ &\approx (1/\Delta t) [(F_2 / F_1)(1 + \beta\Delta t) - 1] = \beta F_2 / F_1 + (F_2 - F_1) / (F_1\Delta t) \approx \\ &\approx \beta - (F_1 - F_2) / (F_1\Delta t) = 70 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1} , \end{aligned} \quad (2)$$

unde am neglijat succesiv termenii pătratici în βt .

5.2.18. Pentru determinarea coeficientului de dilatare al unui lichid (acetona) de densitate cunoscută $\rho_\ell = 792 \text{ kg/m}^3$, s-a luat un corp de plexiglas ($\alpha = 10 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$) de volum $V_c =$

$= 100 \text{ cm}^3$, s-a cufundat în lichidul studiat și s-a observat, cu ajutorul unui dinamometru, că greutatea aparentă a variat cu $\Delta G = 44,0 \text{ mN}$, atunci când sistemul a fost încălzit cu $\Delta t = 50 \text{ K}$. Aflați coeficientul de dilatare absolută al lichidului.

Rezolvare. Preluăm rezultatele de la problema 5.2.17. Greutatea aparentă variază datorită variației forței arhimedice :

$$\Delta G_{ap.} = -\Delta F_A = F_A (\beta - 3\alpha) \Delta t = \rho_\ell V_c g (\beta - 3\alpha) \Delta t, \quad (1)$$

de unde $\beta = 3\alpha + \Delta G : (\rho_\ell V_c g \Delta t) = 143 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. (2)

5.2.19. Pentru determinarea coeficientului de dilatare absolută al unui lichid (benzen) s-a luat un corp de aluminiu de masă $m = 100 \text{ g}$, s-a cufundat în lichidul studiat și s-a măsurat cu ajutorul unui dinamometru greutatea aparentă a corpului la două temperaturi diferite : $P_1 = 0,680 \text{ N}$ la $t_1 = 20^\circ\text{C}$ și $P_2 = 0,697 \text{ N}$ la $t_2 = 70^\circ\text{C}$. Aflați coeficientul de dilatare absolută β al lichidului.

Rezolvare. Greutatea aparentă la temperatura t este

$$P = mg - F_A = mg(1 - \rho_\ell / \rho_c) = mg[1 - (\rho_{\ell 0} / \rho_{c0})(1 + 3\alpha t) / (1 + \beta t)] \quad (1)$$

Scriem greutatea aparentă (1) pentru cele două temperaturi :

$$(mg - P_2) / (mg - P_1) = [(1 + 3\alpha t_2) / (1 + \beta t_2)] (1 + \beta t_1) / (1 + 3\alpha t_1) \approx (1 + 3\alpha \Delta t + \beta t_1) / (1 + \beta t_2) \approx 1 - (\beta - 3\alpha) \Delta t, \quad (2)$$

$$\beta = [3\alpha(mg - P_1) \Delta t + P_2 - P_1] : (mg \Delta t + P_1 t_1 - P_2 t_2) \approx 3\alpha + (P_2 - P_1) : [(mg - P_1) \Delta t] = 120 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}, \quad (3)$$

unde am neglijat succesiv termenii pătratici, în α^2 , $\alpha\beta$, β^2 .

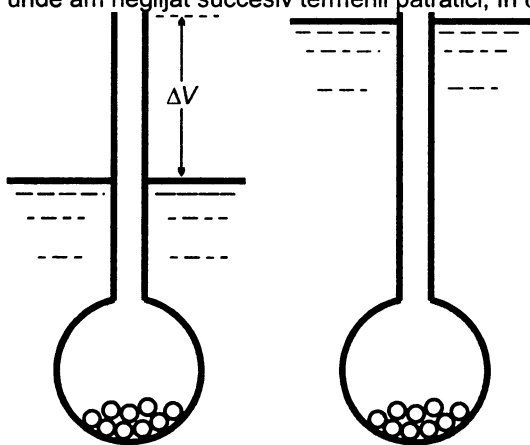


Fig.5.2.20

a)

b)

5.2.20. Pentru a măsura coeficientul de dilatare absolută β al unui lichid (terebentină) s-a construit un balon, terminat cu un gât cilindric subțire, dintr-un material cu coeficientul de dilatare liniară α cunoscut (sticlă). Se cunoaște volumul balonului $V = 100 \text{ cm}^3$. Se introduce în balon alicie astfel ca el să plutească în lichidul studiat, la o temperatură dată, cu gâtul cilindric în afară, ca în figură. Se măsoară volumul $\Delta V = 2,7 \text{ cm}^3$ al porțiunii cilindrice care rămâne afară. Apoi se încălzește încet lichidul până când tubul cilindric se cufundă complet. Cunoșcând creșterea de temperatură corespunzătoare $\Delta t = 30 \text{ K}$, calculați coeficientul de dilatare absolută β al lichidului.

Rezolvare. Masa balonului trebuie să fie egală cu masa lichidului dezlocuit (condiția de plutire) :

$$\text{la temperatura } t_1 : \quad m = (V - \Delta V) \rho_0 / (1 + \beta t_1) ,$$

$$\text{la temperatura } t_2 : \quad m = V(1 + 3\alpha\Delta t) \rho_0 / (1 + \beta t_2) . \quad (1)$$

Egalând expresiile și neglijând termenii pătratici în $\alpha\beta$, găsim :

$$\beta = 3\alpha + \Delta V / (V\Delta t) = 93 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} . \quad (2)$$

*

5.3. TERMOMETRIE

5.3.1. Calculați volumul V_r al rezervorului unui termometru, știind că în capilar pe porțiunea $\Delta t = 100$ grd între diviziunile 0°C și 100°C intră o masă $m = 2,3 \text{ g}$ mercur. Lichidul termometric este alcoolul etilic.

Rezolvare. Volumul unei diviziuni este creșterea aparentă de volum a lichidului pentru 1°C , deci $v = V_r(\beta - 3\alpha)$. Pe de altă parte, din enunț $v = (m / \rho) / \Delta t$, de unde

$$V_r = v : (\beta - 3\alpha) = m : [\rho(\beta - 3\alpha) \Delta t] = 1,6 \text{ cm}^3 .$$

5.3.2. La un termometru volumul rezervorului este de $n = 6400$ ori mai mare decât volumul unei diviziuni. În locul lichidului termometric inițial se introduce tetraclorura de carbon. Aflați : a) coeficientul de dilatare absolută β al lichidului inițial, b) diviziunea N indicată de noul termometru la temperatura $t = 10^\circ\text{C}$.

Rezolvare. a) Volumul unei diviziuni reprezintă creșterea aparentă de volum a lichidului pentru 1°C , deci $v = V_r(\beta_1 - 3\alpha)$, de unde

$$\beta_1 = 3\alpha + v / V_r = 3\alpha + 1 / n = 18,3 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} \text{ (mercur)}. \quad (1)$$

$$b) N = \Delta V / v = V_r(\beta_2 - 3\alpha)t : v = n(\beta_2 - 3\alpha)t = 76 \text{ div}. \quad (2)$$

5.3.3. Dilatarea apei este neregulată și poate fi descrisă prin ecuația

$$V = V_0(1 - at + bt^2), \quad a = 61,05 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}, \quad b = 7,733 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-2}. \quad (1)$$

Cum s-ar comporta un termometru umplut cu apă drept lichid termometric (etalonat în mod obișnuit : în imediata vecinătate a lui 0°C și a lui 100°C , cu scară divizată uniform) ?

Exprimați și reprezentați grafic temperatura ϑ indicată de un astfel de termometru în funcție de temperatura reală $t^\circ\text{C}$.

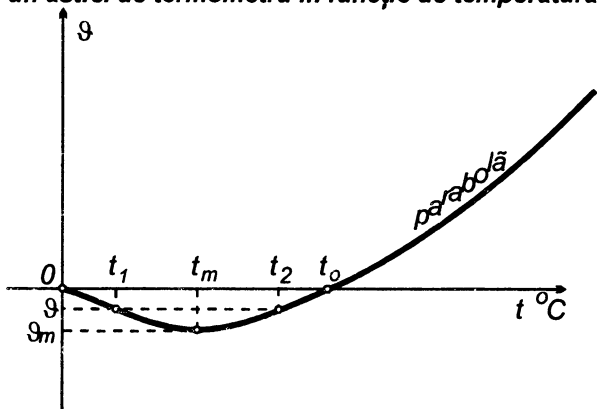


Fig.5.3.3

Rezolvare. Creșterea aparentă a volumului apei între punctele de etalonare, 0° și 100°C , este

$$\Delta V = V - V_0 = V_0 t(bt - a - 3\alpha) = 100 V_0(100b - a - 3\alpha), \quad (1)$$

unde α este coeficientul de dilatare liniară al sticlei termometrului.

Împărțind (1) la intervalul de etalonare 100, obținem volumul unei diviziuni :

$$v = V_0(100 b - a - 3\alpha) . \quad (2)$$

Temperatura ϑ indicată de termometru este raportul dintre creșterea aparentă de volum și volumul unei diviziuni de etalonare:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \Delta V / v = V_0 t (bt - a - 3\alpha) : [V_0(100 b - a - 3\alpha)] = \\ &= t \cdot (bt - a - 3\alpha) : (100 b - a - 3\alpha) . \end{aligned} \quad (3)$$

Funcția *nu este liniară, ci parabolică* (pătratică)(v. figura).

Termometrul arată $0^\circ\vartheta$ de două ori : o dată la 0°C și a doua oară la

$$t_0 = (a + 3\alpha) / b \approx 11,4^\circ\text{C} . \quad (4)$$

Între aceste două temperaturi (0 , t_0) termometrul arată o *aceeași* temperatură *negativă* de două ori, pentru două temperaturi reale $t_{1,2}$ așezate simetric față de temperatura

$$t_m = (a + 3\alpha) / (2b) = t_0 / 2 = 5,7^\circ\text{C} , \quad (5)$$

când termometrul arată o temperatură negativă minimă (minimul parabolei), și anume :

$$\begin{aligned} \vartheta_{\min} &= - (a + 3\alpha)^2 : [4b(100 b - a - 3\alpha)] = - 0,37^\circ\vartheta , \\ (t_1 + t_2 &= 2t_m = t_0) . \end{aligned} \quad (6)$$

Minimul parabolei ($t_m = 5,7^\circ\text{C}$) este deplasat față de maximul densității apei (4°C) din cauza dilatării *vasului* de sticlă.

**** 5.3.4. Dilatarea apei este neregulată, coeficientul de dilatare depinde de temperatură astfel :** $\beta = dV / (V_0 dT) = At - B$,

unde $A = 15,466 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-2}$, $B = 61,05 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

Calculați de câte ori crește volumul apei prin încălzire de la 0°C la 100°C .

Rezolvare. Din definiția coeficientului de dilatare din enunț avem :

$$dV = \beta V_0 dt ,$$

$$\int dV = V - V_0 = \int_0^t \beta V_0 dt = V_0 \int_0^t (At - B) dt = V_0 \left(\frac{1}{2} At^2 - Bt \right) ,$$

de unde $V = V_0 [1 - Bt + (1/2)At^2]$, (1)

$$V / V_0 = 1 - Bt + (1/2)At^2 , \quad (2)$$

Pentru $t = 100^\circ\text{C}$ avem $V_{100} / V_0 \approx 1,07$, (3)

deci volumul crește cu $\approx 7\%$.

* * *

6. VAPORI. HIGROMETRIE

6.1. Vaporii saturați și nesaturați

6.1.1. Vaporii nesaturați aflați într-un cilindru sunt încălziți izocor, apoi comprimați izoterm până la lichefierea totală. Reprezentați grafic procesul în diagrama $p - V$.

Rezolvare. Ținând seama de izotermele reale Andrews, avem graficul din figură.

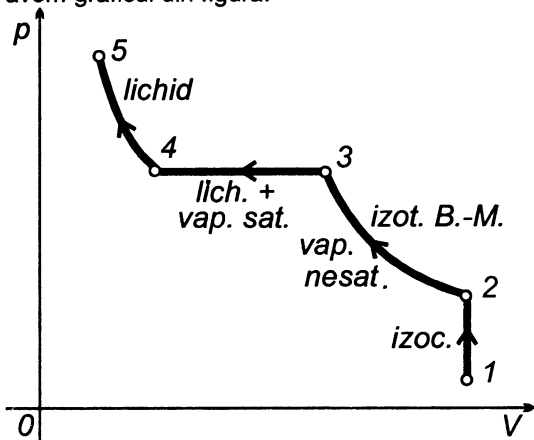


Fig.6.1.1

6.1.2. De câte ori distanța medie dintre molecule este mai mare la vaporii de apă, decât la apa lichidă, la temperatura 0°C ?

Rezolvare. Într-un mol de substanță sunt N_A molecule. Împărțind volumul molar (volumul unui mol) la N_A obținem volumul care revine (în medie) unei molecule. Latura cubului corespunzător acestui volum este chiar distanța (medie) dintre molecule :

$$d = \sqrt[3]{V_{\mu} / N_A} .$$

Volumul molar al gazelor ideale în condiții normale de presiune și temperatură este o constantă fundamentală $V_{\mu 0} = 22,41 \text{ L/mol}$.

În cazul nostru avem vapori de apă saturați, la 0°C , dar la presiunea $p_v = 611 \text{ Pa}$ (din *Tabelele de la Anexe*). Aplicând vaporilor *ecuația de stare* pentru un mol, obținem volumul molar căutat :

$$p_v V_{\mu v} = RT \rightarrow V_{\mu v} = RT / p_v = 3,7 \text{ m}^3/\text{mol} \quad (2)$$

sau altfel,
$$V_{\mu v} = V_{\mu o} (p_o / p_v) (T / T_o) . \quad (3)$$

Să calculăm acum volumul **molar** al apei **lichide** :

$$V_{\mu \text{ apă}} = \mu_{\text{apă}} / \rho_{\text{apă}} = 18 \text{ (g/mol)} : (1,0 \text{ g/cm}^3) = 18 \text{ cm}^3/\text{mol} . \quad (4)$$

Raportul cerut :
$$\sqrt[3]{\frac{V_{\mu v} / N_A}{V_{\mu \text{ apă}} / N_A}} = \sqrt[3]{\frac{V_{\mu v}}{V_{\mu \text{ apă}}}} = 60 . \quad (5)$$

6.1.3. Sub clopotul unei mașini pneumatice s-a pus un pahar cu apă conținând $m = 180 \text{ g}$ apă . Se face vid cu ajutorul unei pompe care are debitul $D = 50 \text{ L/min}$. Temperatura instalației este menținută tot timpul $t = 3,0^{\circ}\text{C}$. În cât timp se vaporizează toată apa ?

Rezolvare. Sub clopot avem vapori **saturați** cu densitatea $\rho_s = 6,0 \text{ g/cm}^3$ (v. *Tabelele de la Anexe*). În unitatea de timp se evacuează masa de vapori $D\rho_s$, deci $t = m : (D\rho_s) = 10 \text{ h}$.

6.1.4. Într-un cilindru vertical se află un mol de apă închis cu un capac de greutate neglijabilă, care se mișcă etanș fără frecări. Temperatura apei $t_f = 100^{\circ}\text{C}$ și presiunea atmosferică este normală . a) Calculați lucrul mecanic de vaporizare la trecerea apei în vapori. b) Care a fost energia de legătură dintre moleculele apei ? c) Calculați energia cinetică medie a moleculelor în stare de vapori .

Rezolvare. a) Vaporizarea se face *izobar* (și *izoterm*), deci lucrul mecanic se face împotriva forței de presiune atmosferică p_o :

$$L = p_o(V_v - V_l) = \nu RT_f - p_o V_l = \nu RT_f - p_o \nu \mu / \rho = \quad (1)$$

$$= 3,1 \text{ kJ} - 1,8 \text{ kJ} = 1,3 \text{ kJ} .$$

b) Căldura latentă (specifică) de vaporizare $\lambda = 2,26 \text{ MJ/kg}$, deci
$$Q_v = \nu \mu \lambda = 40,1 \text{ kJ} . \quad (2)$$

Diferența dintre această căldură de vaporizare și lucrul mecanic (1) reprezintă energia de *legătură* a moleculelor :

$$W_{\text{leg.}} = Q_v - L = 38,8 \text{ kJ} . \quad (3)$$

c) Ținând seama că moleculele de apă au $3 + 3 = 6$ gade de libertate (3 translație + 3 rotație), (vibrațiile atomilor sunt neglijabile la temperatura t_f), avem
$$\epsilon_c = 6 \cdot (1/2)kT = 15,4 \cdot 10^{-21} \text{ J} , \quad (4)$$

$$E_c = N \epsilon_c = \nu N_A \epsilon_c = 9,27 \text{ kJ} . \quad (5) \quad 227$$

6.1.5. Se face experiența lui Torricelli cu un tub de lungime $h = 1,00$ m cu apă în loc de mercur . La ce temperatură apare sus un gol de vapori, adică se desprinde apa de capătul superior ? Presiunea atmosferică este normală.

Rezolvare. Presiunea de la baza coloanei de apă, egală cu presiunea atmosferică H (conform *principiului vaselor comunicante*), echilibrează presiunea hidrostatică a coloanei de apă **plus** presiunea vaporilor *saturați* de deasupra. La limită, în momentul desprinderii : $H = \rho gh + p_s$, $p_s = H - \rho gh = 91,52$ kPa , ceea ce corespunde (v. *Tabele de la Anexe*) temperaturii $t = 97^\circ\text{C}$!!

6.1.6. La ce înălțime poate fi pompată apa cu ajutorul unei pompe de aspirație, dacă temperatura apei este: a) $t_1 = 20^\circ\text{C}$, b) $t_2 = 70^\circ\text{C}$, c) $t_3 = 100^\circ\text{C}$. Presiunea atmosferică este normală.

Rezolvare. Presiunea atmosferică de la baza coloanei de apă echilibrează presiunea hidrostatică a coloanei de apă **plus** presiunea vaporilor *saturați* de deasupra, care se formează în camera pompei de aspirație: $H = \rho gh + p_s$, $h = (H - p_s) / (\rho g)$. (1)
Luăm din *Tabele* (v. *Anexe*) presiunea vaporilor *saturați* la temperaturile din enunț : $h = (H - p_s) / (\rho g) = 10,1$ m; 7,1 m; 0 m . (2)

6.1.7. Într-un cilindru vertical sub un piston se află un strat de apă de grosime $h = 1,0$ mm. Cu cât, x , trebuie deplasat pistonul pentru ca apa să se transforme în vapori ? Temperatura se menține constantă $t = 92^\circ\text{C}$.

Rezolvare. Volumul creat sub piston va fi ocupat de vaporii *saturați* proveniți din vaporizarea apei. Scriem *ecuația de stare* pentru vapori (observăm că pentru vaporii *nesaturați* se pot aplica, cu o aproximație relativ satisfăcătoare, legile gazelor ideale, în schimb pentru vaporii *saturați nu* se pot aplica ecuațiile de transformare de la gazele ideale, ci numai *ecuația de stare* sau *ecuația densității*, cu o anumită aproximație) :

$$p_s(x + h)S = (\rho SH / \mu)RT \rightarrow x = h \cdot \rho RT / (\mu p_s) - h = 2,22 \text{ m} ,$$

($p_s = 75,6$ kPa) .

6.1.8. Într-un cilindru vertical de secțiune $S = 98$ cm² , cu piston de masă $m = 133,3$ kg (care se poate mișca etanș fără frecări), se află imediat sub piston $m_a = 1,00$ g apă. Presiunea atmosferică este normală. a) La ce temperatură pistonul se desprinde de apă ? b) La ce înălțime se ridică pistonul la temperatura $t = 147^\circ\text{C}$?

Rezolvare. a) Presiunea sub piston este

$$p = H + mg / S = 234,6 \text{ kPa} . \quad (1)$$

Aceasta trebuie să fie presiunea vaporilor saturați, altfel ei se condensează la loc și pistonul nu se va desprinde de apă. După Tabele această presiune corespunde temperaturii $t_s = 126^\circ\text{C}$.

b) Deoarece temperatura $t = 147^\circ\text{C} > 126^\circ\text{C}$, înseamnă că toată apa se vaporizează și atunci ecuația de stare dă

$$phS = (m / \mu)RT , \quad h = (m / \mu)RT : (HS + mg) = 8,4 \text{ cm} . \quad (2)$$

6.1.9. Un vas închis conține puțină apă, temperatura fiind $t = 27^\circ\text{C}$ și presiunea în vas egală cu presiunea atmosferică $p = 101,56 \text{ kPa}$. Care va fi presiunea din vas dacă îl introducem în azot lichid ?

Rezolvare. În vas vom avea aer și vapori saturați ai apei. La temperatura $t = 27^\circ\text{C}$ presiunea vaporilor saturați ai apei $p_s = 3,56 \text{ kPa}$. Prin răcire izocoră presiunea uni gaz (ideal) scade mai încet (liniar, după legea Charles) decât presiunea vaporilor saturați respectivi (exponențial). De aceea prin răcire izocoră vaporii de apă rămân tot timpul saturați și se condensează, până apa îngheață și vom avea final vapori saturați deasupra gheții (de exemplu, la 0°C : $p_s = 611 \text{ Pa}$, la $t = -75^\circ\text{C}$; $p_s = 0,080 \text{ Pa}$). La temperatura azotului lichid $t = -196^\circ\text{C}$ presiunea vaporilor saturați ai apei, deasupra gheții, este neglijabilă .

Deoarece la temperatura de fierbere a azotului presiunea vaporilor săi saturați este $p_o = 1 \text{ atm}$, iar ai oxigenului $p_s = 20,7 \text{ kPa}$, care sunt mai mari decât presiunea parțială a azotului, respectiv oxigenului, răciți izocor, aerul din vas nu intră în starea de vapori saturați și nu se condensează. Prin urmare, în vas rămâne, practic, presiunea parțială a aerului răcit izocor :

$$p' = (p - p_s) \cdot T' / T \approx 25,15 \text{ kPa}.$$

6.10. Într-un vas închis de volum $V = 10 \text{ L}$, conținând aer uscat la presiunea normală și temperatura $t = 17^\circ\text{C}$, se introduce $m = 1,0 \text{ g}$ apă și se încălzește vasul până la temperatura $t_1 = 50^\circ\text{C}$ și în continuare până la $t_2 = 100^\circ\text{C}$. Aflați presiunea din vas la cele două temperaturi.

Rezolvare. Masa vaporilor saturați care încap în volumul V este (luăm densitățile din Tabele) :

$$m_{s1} = \rho_{s1} V = 0,83 \text{ g} < m = 1,0 \text{ g} , \quad (1)$$

$$m_{s2} = \rho_{s2} V = 6,0 \text{ g} > m = 1,0 \text{ g} . \quad (2)$$

Aceasta înseamnă că la temperatura t_1 nu se evaporă toată apa introdusă și atunci presiunea din vas se compune din suma presiunilor parțiale: a vaporilor p_{s1} (din Tabel) și a aerului încălzit izocor:

$$p_1 = p_{s1} + H \cdot T_1 / T = 125,3 \text{ kPa} . \quad (2)$$

La temperatura t_2 toată apa se vaporizează, vaporii vor fi nesaturați și avem :

$$p_2 = (m / \mu)RT / V + H \cdot T_2 / T = 147,46 \text{ kPa} . \quad (4)$$

6.1.11. Într-un vas de volum $V = 22,4 \text{ L}$, în condiții normale de presiune și temperatură, se introduc $m = 18,0 \text{ g}$ apă. Apoi vasul este închis ermetic și încălzit până la $t = 100^\circ\text{C}$. Care va fi presiunea din vas ?

Rezolvare. Calculăm câtă masă de vapori saturați la temperatura t încap în volumul vasului V . (Luăm $\rho_s = 0,60 \text{ kg/m}^3$ din Tabel sau o calculăm: $\mu p_s / (RT)$, unde $p_s = p_o$, deoarece $t = 100^\circ\text{C}$):

$$m_s = \rho_s V = 13,44 \text{ g} < m = 18,0 \text{ g} . \quad (1)$$

Aceasta înseamnă că se vor vaporiza $m_s = 13,44 \text{ g}$ apă, iar restul de $4,56 \text{ g}$ rămân în stare lichidă. Presiunea din vas se compune din presiunea vaporilor saturați $p_s = p_o = 101,325 \text{ kPa}$ (presiunea normală) și din presiunea aerului încălzit izocor :

$$p = p_s + p_o \cdot T / T_o = 2,3 \text{ atm} . \quad (2)$$

6.1.12. Într-un vas de volum $V = 1,00 \text{ L}$ se află vapori de apă la presiunea $p_v = 8,31 \text{ kPa}$ și temperatura $t_1 = 123^\circ\text{C}$. Ce masă de rouă se depune pe pereții vasului dacă îl răcim până la $t_2 = 20^\circ\text{C}$?

Rezolvare. La temperatura t_2 masa vaporilor saturați din vas este (luăm $\rho_{s2} = 17,3 \text{ g/m}^3$ din Tabel): $m_s = \rho_{s2} V = 17,3 \text{ mg}$. (1)

Masa totală de apă dată de vaporii p_v este

$$m_v = [\mu p_v / (RT)] \cdot V = 45,0 \text{ mg} . \quad (2)$$

Prin urmare, prin răcirea acestei mase de vapori se produce sigur condensarea unei părți și anume : $m_v - m_s = 27,7 \text{ mg}$. (3)

6.1.13. Într-un vas închis se află apă în echilibru termic cu vaporii săi la temperatura $t_1 = 27^\circ\text{C}$ și presiunea din vas este $p_1 = 100 \text{ kPa}$. Apa ocupă o fracțiune $f = 0,10 = 10 \%$ din volumul vasului. Aflați presiunea din vas la temperatura $t_2 = 387^\circ\text{C}$.

Rezolvare. Temperatura critică a apei $t_c = 374^\circ\text{C} < t_2 = 387^\circ\text{C}$, prin urmare sigur toată apa se vaporizează. Atunci presiunea finală se compune din presiunea p_1 adusă la întregul volum și la temperatura t_2 plus presiunea rezultată din vaporizarea întregii mase de apă : $p = p_1 \cdot [V(1 - f) / V] T_2 / T_1 + (\rho V / \mu) RT_2 / V = p_1(1 - f) T_2 / T_1 + (f \rho / m) RT_2 = 303 \text{ atm}$.

6.1.14. Într-un vas de volum $V = 1,00 \text{ m}^3$ se află un amestec de aer și vapori de eter etilic ($\text{C}_2\text{H}_5\text{-O-C}_2\text{H}_5$) la temperatura $t = 30^\circ\text{C}$ și presiunea $p = 120 \text{ kPa}$. Aflați masa eterului și masa aerului din vas, știind că prin răcire, condensarea eterului a început la 0°C . Presiunea vaporilor saturați ai eterului la 0°C este $p_{s0} = 24,66 \text{ kPa}$.

Rezolvare. La temperatura 0°C vaporii de eter devin saturați și au presiunea p_{s0} , deci masa lor este :

$$m_e = \mu_e p_{s0} V / (RT_0) = 0,805 \text{ kg} . \quad (1) \text{ Acum}$$

scriem ecuația de stare pentru amestecul inițial, în condițiile inițiale din enunț : $pV = (m_a / \mu_a + m_e / \mu_e) RT$, (2) de

unde rezultă $m_a = \mu_a [pV / (RT) - m_e / \mu_e] = 1,08 \text{ kg}$. (3)

6.1.15. Într-o eprubetă a fost cules, sub apă, hidrogen (experiența cu voltmetru). Volumul hidrogenului $V = 29,6 \text{ cm}^3$, înălțimea coloanei de apă din eprubetă $h = 13,6 \text{ cm}$, temperatura $t = 23^\circ\text{C}$, presiunea atmosferică normală. a) Aflați masa de hidrogen. b) Ce eroare am comite dacă am neglija prezența vaporilor de apă ?

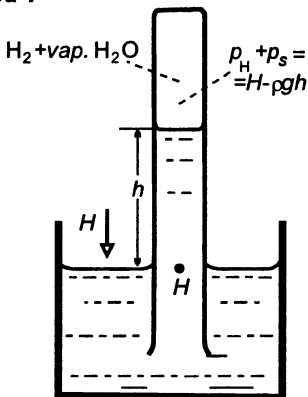


Fig.6.1.15

Rezolvare. a) Hidrogenul cules în epiubetă (*voltmetru*) este în amestec cu vaporii saturați ai apei la temperatura t ($p_s = 2,81$ kPa din *Tabel*). Presiunea atmosferică H echilibrează presiunea hidrostatică a coloanei de apă plus presiunea amestecului de hidrogen și vaporii saturați ai apei :

$$H = \rho gh + p_H + p_s, \quad p_H = H - \rho gh - p_s = 97,2 \text{ kPa}; \quad (1)$$

$$m_H = \mu p_H V / (RT) = 2,34 \text{ mg}. \quad (2)$$

b) În acest caz, $H = \rho gh + p_H'$. $p_H' = H - \rho gh$,

$$m_H' = \mu p_H' V / (RT) = m_H \cdot (H - \rho gh) / p_H = 2,4 \text{ mg}, \quad (3)$$

$$\varepsilon = (m' - m) / m = (p_H' - p_H) / p_H = p_s / p_H = 3 \%. \quad (4)$$

6.1.16. Un tub suficient de lung, închis la un capăt, este cufundat vertical în apă astfel încât rămâne afară o lungime $\ell = 2,00$ m și la 0°C înălțimea coloanei de apă din tub este $h = 1,00$ m, ca în figură. Presiunea atmosferică este normală. Care va fi înălțimea coloanei de apă la temperatura $t = 100^\circ\text{C}$?

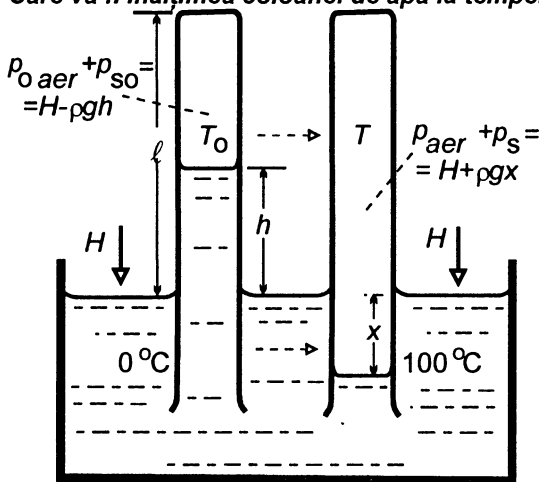


Fig.6.1.16

Rezolvare. La temperatura $t = 100^\circ\text{C}$ presiunea vaporilor saturați ai apei este presiunea *normală* (amintim: apa fierbe la 100°C la presiunea atmosferică *normală*, care este deci presiunea vaporilor săi *saturați* la această temperatură), deci va egala presiunea atmosferică $p_s = H = 101,325$ kPa. Dar la presiunea p_s a vaporilor din tub se mai adaugă presiunea *parțială* a aerului din tub, deci coloana de apă va coborî sigur sub nivelul apei din vas.

La 0°C presiunea vaporilor *saturanți* ai apei este (din *Tabel*) $p_{\text{so}} = 611 \text{ Pa}$, deci putem afla presiunea parțială inițială a aerului din

$$\text{tub : } H = p_{\text{o aer}} + p_{\text{so}} + \rho gh \rightarrow p_{\text{o aer}} = H - \rho gh - p_{\text{so}} \quad (1)$$

$$\text{În starea finală avem } H + \rho gx = p_{\text{aer}} + p_{\text{s}} \rightarrow$$

$$p_{\text{aer}} = H + \rho gx - p_{\text{s}} = \rho gx, \quad (p_{\text{s}} = H !). \quad (2)$$

Scriem ecuația *transformării generale* a masei de aer din tub :

$$(H - \rho gh - p_{\text{so}})(\ell - h) : T_{\text{o}} = (H + \rho gx - p_{\text{s}}) : T, \quad (3)$$

$$\text{unde } p_{\text{s}} = H \text{ și } p_{\text{so}} = 611 \text{ Pa}.$$

Rezultă o ecuație de gradul 2 în x :

$$x^2 + x\ell - [(p_{\text{s}} - p_{\text{so}}) / (\rho g) - h] \ell - h) T / T_{\text{o}} = 0 \quad (4)$$

$$\text{sau } x^2 + 2x - 12,66 = 0 \quad (5)$$

cu soluția acceptabilă $x = 2,7 \text{ m}$.

6.1.17. Într-un cilindru cu piston se află o masă $m = 10,0 \text{ g}$ de azot și de vapori saturați ai apei, care ocupă un volum $V = 10,0 \text{ L}$ la temperatura $t = 27^{\circ}\text{C}$. a) Ce presiune are amestecul ? b) Care va fi presiunea amestecului dacă micșorăm izoterm volumul de $n = 3,0$ ori ?

Rezolvare. a) Masa vaporilor saturați de apă :

$$m_{\text{s}} = \rho_{\text{s}} V = 0,258 \text{ g}, \quad \rho_{\text{s}} = 25,8 \text{ g/m}^3 \text{ (din Tabel)}. \quad (1)$$

Presiunea amestecului se compune din presiunea vaporilor saturați $p_{\text{s}} = 3,56 \text{ kPa}$ (din *Tabel*) plus presiunea parțială a azotului a cărui masă este $m - m_{\text{s}}$:

$$p = p_{\text{s}} + (m - m_{\text{s}}) RT / (\mu_{\text{N}_2} V) = 90,22 \text{ kPa}. \quad (2)$$

b) Prin comprimarea *izotermă* o parte din vaporii saturați se condensează. Neglijând volumul apei obținute față de volumul vasului, putem scrie pentru presiunea amestecului :

$$p' = p_{\text{s}} + n(p - p_{\text{s}}) = 2,6 \text{ atm}, \quad (3)$$

unde presiunea parțială a azotului a crescut de n ori prin comprimarea *izotermă* a volumului de n ori.

6.1.18. Un tub de lungime $\ell = 1,00 \text{ m}$ conține aer și vapori saturați ai apei și se atinge cu gura de suprafața apei, ca în figură. Cufundând tubul cu $\ell / 2$, apa intră în tub la înălțimea $h = 10 \text{ cm}$. Presiunea atmosferică este $H = 101,28 \text{ kPa}$. Aflați presiunea vaporilor saturați la temperatura la care s-a făcut experiența.

Rezolvare. În eprubetă avem aer cu vapori saturați, închiși

inițial la presiunea atmosferică. În starea finală presiunea amestecului este

$$H + \rho g(\ell / 2 - h) = p' + p_s . \quad (1)$$

Aerul închis în tub suferă o comprimare izotermă :

$$(H - p_s) \ell = p'(\ell - h) = [H + \rho g(\ell / 2 - h) - p_s](\ell - h) , (2) \text{ de}$$

unde $p_s = H - \rho g(\ell / 2 - h)(\ell / h - 1) = 66,0 \text{ kPa}$, (3) ceea ce corespunde temperaturii $t = 89^\circ\text{C}$.

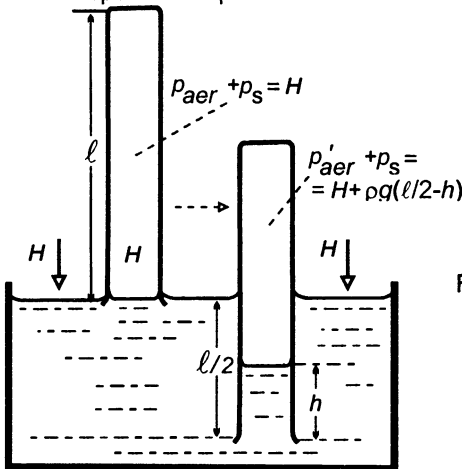


Fig.6.1.18

6.1.19. Într-un cilindru vertical de secțiune $S = 1,00 \text{ dm}^2$, sub un piston de masă $m_1 = 0,40 \text{ kg}$, se află $m = 1,80 \text{ g}$ vapori de apă la temperatura $t_1 = 87^\circ\text{C}$, presiunea atmosferică fiind $H = 99,32 \text{ kPa}$. De piston este prins, prin intermediul unor scripeți, un corp de masă $m_2 = 67 \text{ kg}$, ca în figură. Sistemul este în echilibru. a) Aflați înălțimea inițială la care se află pistonul. b) Sistemul este răcit. Aflați temperatura t_2 la care începe condensarea vaporilor și înălțimea h_2 a pistonului în acel moment. c) Înălțimea pistonului la temperatura $t_3 = 20^\circ\text{C}$.

Rezolvare. a) Presiunea vaporilor sub piston :

$$p_v = H + (m_1 g - m_2 g) / S = 34 \text{ kPa} , \quad (1)$$

ceea ce corespunde temperaturii $t_2 = 72^\circ\text{C} < t_1$, prin urmare vaporii **nu** sunt saturați (fapt care rezultă și din punctul b) de la enunț). Din ecuația de stare rezultă :

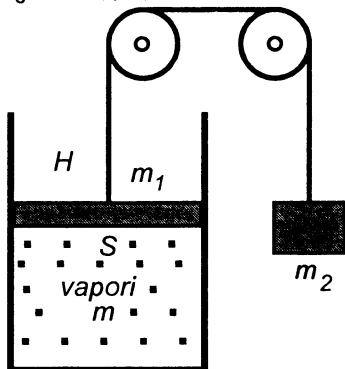
$$p_v S h_1 = (m / \mu) R T_1 / p , \quad h_1 = (m / \mu) R T_1 / (p S) = 88 \text{ cm} . \quad (2)$$

b) Răcirea este *izobară*, la presiunea (1). La temperatura $t_2 = 72^\circ\text{C}$ de mai sus, vaporii devin *saturați* și începe condensarea lor. În acest moment, din legea transformării *izobare* avem :

$$h_2 = h_1 \cdot T_2 / T_1 = 84 \text{ cm} . \quad (3)$$

c) La temperatura t_3 vaporii sunt condensati și stratul de apă are înălțimea $h_3 = m : (\rho S) < 0,2 \text{ mm} . \quad (4)$

Fig.6.1.19



6.1.20. Într-un cilindru sub un piston se află la temperatura $t = 87^\circ\text{C}$ vaporii saturați ai apei. Ce lucru mecanic efectuăm dacă împingem încet pistonul, menținând temperatura constantă și știind că s-a degajat o cantitate de căldură $Q = 2,257 \text{ kJ}$?

Rezolvare. Se produce condensarea vaporilor la temperatură și presiune constante. Prin aceasta se degajă căldura *latentă* Q , deci masa vaporilor saturați : $m_v = Q : \lambda . \quad (1)$

Pe de altă parte, acești vaporii ocupau un volum ΔV :

$$\rho_s \Delta V = (m_v / \mu) RT = [Q / (\mu \lambda)] RT . \quad (2)$$

În sfârșit, lucrul mecanic *izobar* efectuat:

$$L = \rho_s \Delta V = [Q / (\mu \lambda)] RT = 166 \text{ J} . \quad (3)$$

6.1.21. Într-un lac este cufundată o țeavă deschisă la capete, în care se află un piston de masă neglijabilă, de arie transversală $S = 100 \text{ cm}^2$, tangent la suprafața apei, care se poate deplasa etanș fără frecări. Ce lucru mecanic trebuie efectuat pentru a ridica încet pistonul până la înălțimea $h = 15 \text{ m}$? Presiunea atmosferică $H = 100 \text{ kPa}$ și temperatura $t = 15^\circ\text{C}$. Reprezentați forța care trebuie aplicată pistonului în funcție de înălțimea sa y .

Rezolvare. Cum începem să ridicăm pistonul, sub el urcă și o coloană de apă împinsă de presiunea atmosferică :

$$H = (H - F/S) + \rho g y \rightarrow F = \rho g y S. \quad (1)$$

Aceasta se întâmplă până în momentul când presiunea imediat sub piston devine egală cu presiunea vaporilor *saturanți* la temperatura $t = 15^\circ\text{C}$ ($p_s = 1,7 \text{ kPa}$), când coloana de lichid se desprinde de piston și rămâne fixă. De aici încolo :

$$H = p_s + \rho g h_o, \quad F_o = (H - p_s) S, \quad (2)$$

$$h_o = (H - p_s) / (\rho g) = 10,0 \text{ m} < h, \quad F_o = (H - p_s) S = 9,83 \text{ kN}. \quad (3)$$

Lucrul mecanic cerut (aria de sub graficul forței) :

$$\begin{aligned} W &= (1/2) h_o F_o + (h - h_o) F_o = F_o (h - h_o / 2) = \\ &= (H - p_s) S [h - (H - p_s) / (2\rho g)] = 10 \text{ kJ}. \end{aligned} \quad (4)$$

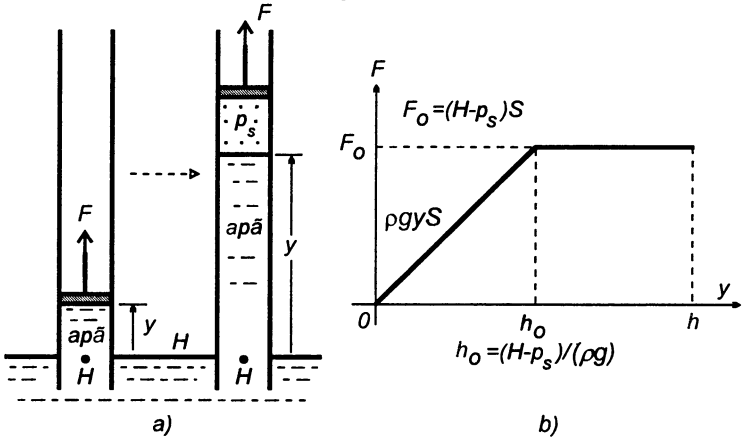


Fig.6.1.21

6.1.22. Într-un vas închis de volum $V = 33,6 \text{ L}$ se află aer și apă. La temperatura $t = 100^\circ\text{C}$ presiunea din vas este $p = 200 \text{ kPa}$. Aflați cantitatea de aer dacă cantitatea de apă este :

a) $\nu = 1,00 \text{ mol}$, b) $\nu = 2,00 \text{ mol}$.

Rezolvare. Să calculăm presiunea vaporilor de apă, dacă toată apa s-ar vaporiza :

$$p_v = \nu RT / V = 92,25 \text{ kPa}, \text{ respectiv } 184,5 \text{ kPa}. \quad (1) \text{ Ținând}$$

seama că la temperatura dată $t = 100^\circ\text{C}$ presiunea vaporilor saturanți este $p_s = 1,00 \text{ atm} = 101,3 \text{ kPa}$, rezultă că pentru

$\nu = 1,0 \text{ mol}$ de apă, toată apa se va vaporiza, iar pentru $\nu = 2,0 \text{ mol}$

de apă, se va vaporiza o parte din apă, care va avea presiunea parțială p_s , iar restul de apă va fi lichid, de volum neglijabil față de volumul vasului (1 mol de apă are volumul $18 \text{ cm}^3 \ll V = 33,6 \text{ L}$).

Numărul de moli de aer se obține din *ecuația de stare* :

$$\begin{aligned} \text{a) } v_{\text{aer}} + v_v &= pV / (RT), \quad v_{\text{aer}} = (p - p_v)V / (RT) = \\ &= pV / (RT) - v = 1,17 \text{ mol.} \end{aligned} \quad (2)$$

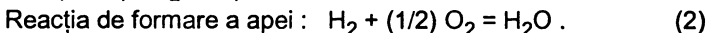
$$\text{b) } v' = (p - p_s) V / (RT) = 1,07 \text{ mol}, \quad (3) \text{ se}$$

vaporizează doar $v_v = p_s V / (RT) = v \cdot p_s / p_v = 1,10 \text{ mol}$ apă.

6.1.23. Într-un balon de volum $V = 10 \text{ L}$ se află $v_1 = 1,00$ mol H_2 și $v_2 = 1,00$ mol O_2 la temperatura $t_1 = 0^\circ\text{C}$. De câte ori crește presiunea după terminarea reacției de formare a apei, dacă temperatura finală devine $t_2 = 100^\circ\text{C}$?

Rezolvare. Aflăm presiunea inițială din *ecuația de stare* :

$$p_1 = (v_1 + v_2) RT_1 / V = 450 \text{ kPa}. \quad (1)$$



Prin urmare din cantitățile date de reactanți se formează $v_{\text{apă}} = 1$ mol apă și rămâne $v_{\text{O}_2} = 1/2$ mol O_2 .

Dacă toată apa formată s-ar vaporiza la temperatura $t_2 = 100^\circ\text{C}$ am avea presiunea vaporilor

$$p_v = v_{\text{apă}} RT_2 / V = 300 \text{ kPa} > p_s = 101,3 \text{ kPa}. \quad (3)$$

Prin urmare, o parte din apa formată rămâne lichidă și presiunea amestecului se compune din presiunea vaporilor *saturanți* p_s plus

$$\text{presiunea oxigenului : } p_2 = p_s + v_{\text{O}_2} RT_2 / V = 251 \text{ kPa}. \quad (4)$$

$$\text{Raportul de creștere a presiunii : } p_2 / p_1 = 0,55, \quad (5)$$

fiindcă creșterea de temperatură $T_2 / T_1 = 1,37$ nu compensează scăderea numărului de moli ($2 / 1,5$) și faptul că doar o fracțiune $p_s / p_v = 1 / 3$ din apa formată rămâne în stare gazoasă.

6.1.24. Prin comprimarea izotermă a $m = 9,0 \text{ g}$ vapori de apă la temperatura $t = 100^\circ\text{C}$, presiunea vaporilor a crescut de $n = 2,0$ ori, iar volumul a scăzut de $n + 1$ ori. Aflați volumul inițial al vaporilor de apă.

Rezolvare. Deoarece prin comprimare izotermă presiunea a crescut, înseamnă că vaporii **nu** au fost saturați. Deoarece volumul nu a scăzut tot de n ori (așa cum cere *legea Boyle-Marriott* pentru gaze *ideale*), înseamnă că vaporii prin comprimare izotermă

au devenit la un moment dat saturați, după care presiunea a rămas *constantă*. Deoarece $t = 100^{\circ}\text{C}$, presiunea vaporilor saturați este chiar presiunea *normală* $p_s = 101,3 \text{ kPa}$ (apa fierbe la 100°C la presiunea *normală*).

Prin urmare, dacă presiunea finală este p_s înseamnă că cea inițială a fost $p_v = p_s / n$ și ecuația de *stare* dă :

$$p_v V = (p_s / n) V = (m / \mu) RT, \quad V = (m / \mu) RT n / p_s = 31 \text{ L.}$$

6.1.25. Într-un vas, inițial vidat, de volum $V = 1,00 \text{ L}$, închis ermetic, se introduce o fiolă deschisă cu $m = 10 \text{ g}$ apă, care este încălzită până la $t = 100^{\circ}\text{C}$ și menținută în continuare la această temperatură. Ce masă de apă se evaporă ?

Rezolvare. Practic instantaneu se evaporă apă până se atinge presiunea vaporilor *saturați*, corespunzătoare practic temperaturii inițiale a apei (vaporizarea în vid). Apoi se evaporă apa în continuare până se obține presiunea vaporilor saturați $p_s = 101,3 \text{ kPa}$ corespunzătoare temperaturii $t = 100^{\circ}\text{C}$, deci

$$m = \mu p_s V / (RT) = 0,58 \text{ g}$$

(am neglijat volumul apei lichide rămase $\sim 9 \text{ cm}^3 \ll V = 10^3 \text{ cm}^3$).

6.1.26. O pompă pompează cu debitul $q = 0,80 \text{ L/s}$ vaporii de apă dintr-un vas pe fundul căruia sunt $m = 200 \text{ g}$ apă. Temperatura este menținută constantă $t = 20^{\circ}\text{C}$. Aflați timpul după care apa se vaporizează complet.

Rezolvare. Masa de vapori m_v^* evacuată în *unitatea de timp* se poate afla din *ecuația de stare*, considerând că apa se evaporă suficient de repede pentru a satura corpul de pompă, deci pentru a avea mereu vapori *saturați* la temperatura t ($p_s = 2,33 \text{ kPa}$, $\rho_s = 17,3 \text{ g/m}^3$). În *unitatea de timp* volumul de vapori evacuat este q , prin urmare,

$$p_s q = (m_v^* / \mu) RT \quad \text{sau direct} \quad m_v^* = \rho_s q, \quad (1)$$

de unde

$$\tau = m / m_v^* = m RT / (\mu p_s q) = m / (\rho_s q) = 4,0 \text{ h.} \quad (2)$$

6.1.27. Într-un vas, inițial vidat, de volum $V = 1,00 \text{ L}$, s-a introdus o masă de apă și s-au măsurat presiunile la trei temperaturi : $t_1 = 80^{\circ}\text{C}$, $p_1 = 19,2 \text{ kPa}$; $t_2 = 90^{\circ}\text{C}$, $p_2 = 42 \text{ kPa}$; $t_3 = 120^{\circ}\text{C}$, $p_3 = 45,5 \text{ kPa}$. Aflați masa apei. Cât devin cele 3 presiuni dacă masa apei se reduce cu $f = 20 \%$?

Rezolvare. Masa vaporilor din vas se calculează din ecuația de stare : $m_1 = \mu p_1 V / (RT_1) = 0,125 \text{ g} < m_2 = \mu p_2 V / (RT_2) =$
 $= m_3 = \mu p_3 V / (RT_3) = 25 \text{ g} .$ (1)

De aici se vede că în primul caz avem vapori *saturați* plus apă lichidă, iar în cazurile 2 , 3 avem vapori *nesaturați* (toată apa s-a vaporizat).

Noua masă de apă $m' = (1 - f)m = 20 \text{ g} > m_1$, prin urmare, la temperatura t_1 vom avea și acum vapori *saturați* la presiunea $p_1' = p_1$.

La celelalte două temperaturi vaporii rămân evident *nesaturați* (prin micșorarea apei vaporizate) :

$$p_2' = p_2 \cdot m' / m = (1 - f)p_2 = 0,80 p_2 , \quad p_3' = 0,80 p_3 . \quad (2)$$

6.1.28. Într-un vas închis se află $m_v = 100 \text{ g}$ vapori de apă la temperatura $t = 100^\circ\text{C}$ și o masă $m_a = 1,0 \text{ g}$ apă. Până la ce temperatură trebuie încălzit vasul pentru ca să se evapore toată apa ? Ce cantitate de căldură este necesară ? Se știe că presiunea vaporilor saturați ai apei în jurul temperaturii de 100°C variază cu $\alpha = 3,7 \text{ kPa/K}$. Se dau $\lambda_v = 2,25 \text{ MJ/kg}$ și pentru vaporii de apă $c_v = 1,38 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{K)}$.

Rezolvare. Deoarece vaporii sunt în *echilibru termic* cu lichidul din care provin, înseamnă ca ei sunt *saturați*, și deoarece $t = 100^\circ\text{C}$ înseamnă că presiunea lor este cea *normală* $p_s = p_o = 101,3 \text{ kPa}$ (apa fierbe la 100°C la presiune *normală*). *Ecuația de stare* în cele două stări :

$$p_s V = (m_v / \mu) RT, \quad (p_s + \Delta p_s) V = [(m_v + m_a) / \mu] R(T + \Delta T), \quad (1)$$

dar conform enunțului $\Delta p_s = \alpha \Delta T$, atunci cea de-a doua ecuație devine

$$(p_s + \alpha \Delta T) V = [(m_v + m_a) / \mu] R(T + \Delta T), \quad (2)$$

Scăzând de aici prima ecuație (1) :

$$\alpha \Delta T V = (R / \mu) [m_a T + (m_v + m_a) \Delta T] \quad (3)$$

și împărțind la prima ecuație (1) :

$$\Delta T = T \cdot m_a p_s : [m_v \alpha T - p_s (m_v + m_a)] = 0,3 \text{ K}, \quad (4)$$

ceea ce justifică aproximația $\Delta p_s = \alpha \Delta T$ (*metoda autoconsistentă*). Căldura necesară se poate scrie astfel :

$$Q \cong m_a \lambda_v + (m_v + m_a) c_v \Delta T = 2,29 \text{ kJ} , \quad (5)$$

ultimul termen este foarte mic (40,4 J) .

6.1.29. Într-un cilindru vertical, izolat termic, sub un piston de secțiune $S = 100 \text{ cm}^2$ și masă neglijabilă, se află $m_v = 18 \text{ g}$ vapori saturați de apă. În cilindru se introduc $m_a = 18 \text{ g}$ apă la 0°C . Cu cât coboară pistonul? Presiunea atmosferică este normală. Capacitatea calorică a cilindrului și pistonului sunt neglijabile.

Rezolvare. Fiind vapori saturați la o presiune egală cu cea normală, înseamnă că temperatura $t = 100^\circ\text{C}$ (apa fierbe la 100°C la presiunea atmosferică normală). Deoarece masa vaporilor m_v este egală cu masa apei m_a și deoarece $m_a c \Delta t < m_v \lambda_v$, apa rece m_a se va încălzi până la $t = 100^\circ\text{C}$ pe seama căldurii de la condensarea unei părți a vaporilor saturați și vom avea, în echilibru, apă și vapori saturați la 100°C .

$$m_a c \Delta t = m_v' \lambda_v, \quad m_v' = m_a c \Delta t / \lambda_v = m_a c t / \lambda_v = 3,3 \text{ g}. \quad (1)$$

Această masă de vapori ocupă volumul

$$V' = (m_v' / \mu) RT / p_0 = 5,7 \text{ L}. \quad (2)$$

Volumul apei condensate din vapori este neglijabil ($3,3 \text{ cm}^3$ «

$$\ll 5,7 \text{ L}), \text{ astfel încât } h = V' / S = 57 \text{ cm} \quad (3)$$

(stratul de apă condensată ar avea grosimea $3,3 / 100 = 0,33 \text{ mm}$).

6.1.30. Un amestec din $m_1 = 100 \text{ g}$ azot și m_2 oxigen este supus unei comprimări izoterme la temperatura $T = 77 \text{ K} =$ temperatura de fierbere a azotului la presiunea normală. S-a obținut graficul din figură în unități arbitrare. Aflați masa m_2 a oxigenului și presiunea vaporilor săi saturați la temperatura $T = 77 \text{ K}$. La presiunea normală oxigenul fierbe la temperatura 90 K .

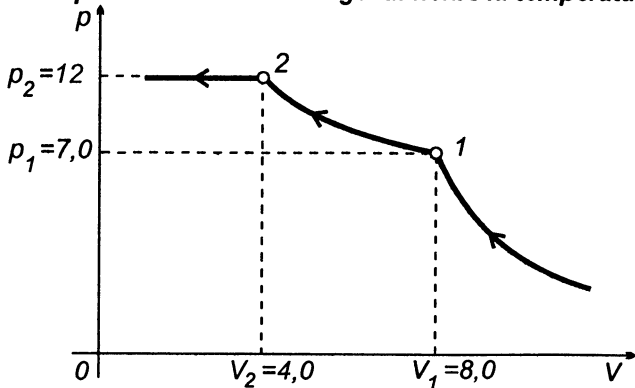


Fig.6.1.30

Rezolvare. Deoarece pentru $V < V_2$ palierul este **orizontal**, acolo avem o transformare *izotermă* (conform enunțului) care este în același timp și **izobară**, deci conform izotermelor lui **Andrews** acolo se produce condensarea ambelor gaze și presiunea este egală cu suma presiunilor vaporilor saturați (la $T = 77 \text{ K}$):

$$p_2 = p_{s1} + p_{s2} = p_0 + p_{s2}, \text{ căci } p_{s1} = p_0, \quad (1)$$

deoarece $T = 77 \text{ K}$ este temperatura de fierbere a azotului la presiunea atmosferică normală p_0 . Deoarece O_2 se află la $T = 77 \text{ K}$, care este mai mică decât temperatura sa de fierbere (90 K) la presiunea normală p_0 , înseamnă că $p_{s2} < p_0$ (p_{s2} devine p_0 la temperatura de fierbere a oxigenului).

Dacă după 2 condensează ambele gaze, este clar din grafic că de la 1 la 2 condensează un singur gaz, iar până la 1 **nu** condensează nici unul și avem acolo o izotermă **Boyle-Mariotte**.

Să presupunem că în 1 începe condensarea oxigenului, adică prin comprimare (izotermă) vaporii săi devin saturați. Atunci în punctul 1 trebuie să avem:

$$p_1 = p_{s2} + p_{s1} \cdot V_2 / V_1 = p_{s2} + p_0 V_2 / V_1, \quad (2)$$

unde al doilea termen se obține din transformarea *Boyle-Mariotte* a azotului pe porțiunea 1 - 2.

Facem raportul celor două expresii (1) și (2) pentru a elimina unitățile arbitrare de presiune, necunoscute:

$$p_2 / p_1 = (p_0 + p_{s2}) : (p_{s2} + p_0 V_2 / V_1) \rightarrow$$

$$p_{s2} = p_0 [1 - p_2 V_2 / (p_1 V_1)] : (p_2 / p_1 - 1) = p_0 / 5 = 20,3 \text{ kPa}. \quad (3)$$

Ipoteza că în 1 începe condensarea azotului conduce la $p_{s2} = 5p_0 > p_0$, contrar celor stabilite mai sus.

În punctul 1 pentru *oxigen*, respectiv în punctul 2 pentru *azot*, ecuația de stare ne dă:

$$p_{s2} V_1 = (m_2 / \mu_2) RT, \text{ respectiv } p_0 V_2 = (m_1 / \mu_1) RT. \quad (4)$$

Împărțind membru la membru aceste ecuații, obținem:

$$p_{s2} V_1 / (p_0 V_2) = m_2 \mu_1 / (m_1 \mu_2) \rightarrow$$

$$m_2 = m_1 [p_{s2} V_1 / (p_0 V_2)] \cdot \mu_2 / \mu_1 = (16 / 35) m_1 = 46 \text{ g}. \quad (5)$$

6.1.31. Un piston, care se poate mișca etanș fără frecări, se află în echilibru și împarte un cilindru orizontal în două jumătăți de volum $V = 1,00 \text{ L}$ fiecare. Într-o parte se află aer uscat, iar în cealaltă vapori de apă și $m = 4,0 \text{ g}$ apă. Încălzind lent sistemul, pistonul ajunge într-o nouă poziție de echilibru, deplasându-se cu $V / 2$. Aflați masa m_v a vaporilor înainte de

încălzire, masa aerului, temperatura inițială și cea finală, presiunea inițială și cea finală. Pentru presiunea vaporilor saturați ai apei în funcție de temperatură se poate folosi Tabelul de la Anexe sau tabelul următor :

$t, ^\circ\text{C}$	100	120	133	152	180
p_s, kPa	100	200	300	500	1000

Rezolvare. Pentru jumătatea cu aer uscat, respectiv pentru vaporii din cealaltă jumătate, avem ecuațiile :

$$pV / T_1 = p_2 (V/2) / T_2, \quad p_1 V = (m_v / \mu) RT_1, \quad (1)$$

unde p_1 este presiunea de o parte și de alta a pistonului și în același timp este presiunea vaporilor *saturați* la temperatura t_1 :

$$p_1 = p_s(t_1).$$

Prin încălzirea sistemului pistonul se va deplasa până când se evaporă toată apa și presiunea devine $p_2 = p_s(t_2)$, egală de o parte și de alta a pistonului. De aici încolo, chiar dacă continuăm încălzirea, pistonul va sta pe loc în echilibru.

În momentul evaporării complete a apei :

$$p_2 \cdot 3V/2 = [(m_v + m) / \mu] RT_2. \quad (2)$$

Ținând seama de (1) partea stângă a ecuației (2) se prelucrează:

$$3p_2 V/2 = 3(T_2 / T_1)p_1 V = 3(m_v / \mu)RT_2 = [(m_v + m) / \mu]RT_2 \rightarrow m_v = m/2 = 2,0 \text{ g}. \quad (3)$$

Acum reprezentăm grafic tabelul dat $p_s = f(t)$. Pe de altă

parte, din (1) avem $p_1 = (m_v / \mu)RT_1 / V$, (4)

deci construim graficul corespunzător $p = (m_v / \mu)(R / V) \cdot T$ sau nu-

meric : $p_{[\text{kPa}]} = 0,92 T$ și îl intersectăm cu $p_s = f(t)$, de unde găsim punctul de intersecție: $t_1 = 140^\circ\text{C}$, $p_1 = 375 \text{ kPa}$. (5)

Mai departe, din (2)avem :

$$p_2 = [(m_v + m) / \mu] [R / (3V/2)] \cdot T_2, \quad (6)$$

deci construim graficul corespunzător

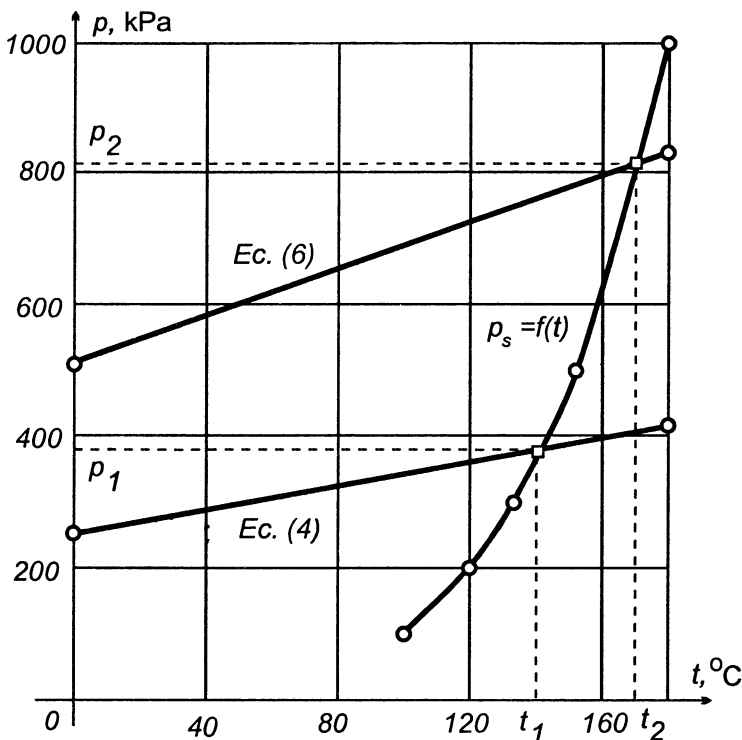
$p = [(m_v + m) / \mu] [R / (3V/2)] \cdot T$ sau numeric $p_{[\text{kPa}]} = 1,85 T$

și îl intersectăm cu $p_s = f(t)$, de unde găsim punctul de intersecție:

$$t_2 = 170^\circ\text{C}, \quad p_2 = 813 \text{ kPa}. \quad (7)$$

Masa de aer se obține acum din ecuația de stare :

$$m_{\text{aer}} = \mu_{\text{aer}} p_1 V / (RT_1) = 3,17 \text{ g}. \quad (8)$$



* 6.1.32. Cunoscând temperatura de fierbere a apei pe un munte, evaluai înălțimea muntelui și precizia acestei evaluări.

Rezolvare. Cunoscând temperatura de fierbere a apei, găsim din Tabele presiunea atmosferică corespunzătoare, iar din formula barometrică rezultă înălțimea muntelui. La o precizie $\Delta t_f = 0,1^{\circ}\text{C}$ rezultă o precizie $\Delta p \approx 300 \text{ Pa}$, conform Tabelului. Deoarece aceste variații sunt mici le putem calcula ca diferențiale.

Diferențiem *logaritmic* formula barometrică (adică întâi logaritmic apoi diferențiem) :

$$p = p_0 e^{-\mu gh / (kT)}, \quad dp / p = - [\mu g / (RT)] dh, \quad (7)$$

de unde trecând la variații mici în locul diferențialelor :

$$\Delta h = - [RT / (\mu gp)] \Delta p. \quad (2)$$

Cu valori obișnuite ale mărimilor, rezultă precizia de determinare $\Delta h \sim 30 \text{ m}$.

6.2. Higrometrie

6.2.1. a) Arătați că pentru temperaturi obișnuite de cameră (0 ... 35°C) densitatea vaporilor de apă exprimată în g/m³ este numeric egală, aproximativ, cu presiunea vaporilor de apă exprimată în mm Hg (torr) .

b) Arătați că raportul densităților vaporilor saturați este egal cu raportul presiunilor vaporilor saturați înmulțit cu raportul invers al temperaturilor absolute.

Rezolvare. a) $\rho = \mu p / (RT) \rightarrow \rho_{[g/m^3]} =$
 $= 18 \text{ (g/mol)} \cdot p_{[\text{torr}]} \cdot 133,322 \text{ (Pa/torr)} : \{8,31 \text{ [J/(mol} \cdot \text{K)]} \cdot T_{[K]}\} =$
 $= (288,6 / T) \cdot p_{[\text{torr}]} .$ (1)

Exemple numerice:

la $t = 0^\circ\text{C} \rightarrow \rho_{[g/m^3]} = 1,057 p_{[\text{torr}]}$,

la $t = 15,5^\circ\text{C} \rightarrow \rho_{[g/m^3]} = p_{[\text{torr}]}$,

la $t = 35^\circ\text{C} \rightarrow \rho_{[g/m^3]} = 0,937 p_{[\text{torr}]}$.

b) $\rho_s = \mu p_s / (RT) \rightarrow \rho_{s1} / \rho_{s2} = (p_{s1} / p_{s2}) \cdot (T_2 / T_1)$. (2)

6.2.2. La ce temperatură a aerului din cameră umiditatea relativă este $U = 50\%$, dacă punctul de rouă (izocor) este $t_r = 8,0^\circ\text{C}$? Dar dacă punctul de rouă s-a obținut prin răcire izobară ?

Rezolvare. a) Prin răcire izocoră densitatea vaporilor nu se schimbă ($\rho_v = m_v / V$) până la obținerea punctului de rouă când vaporii devin saturați și începe condensarea. În acest moment :

$$\rho_v = \rho_s(t_r) \text{ (se ia din Tabele)} , \rightarrow$$
 (1)

dar $U = \rho_v / \rho_s \rightarrow \rho_s(t) = \rho_v / U = \rho_s(t_r) / U = 16,4 \text{ g/m}^3$, (2)

ceea ce corespunde temperaturii $t = 19^\circ\text{C}$ (după Tabele).

b) Prin răcire izobară presiunea vaporilor (p_v) nu se schimbă, dar la o anumită temperatură ei devin saturați și începe condensarea. În acest moment : $p_v = p_s(t_r) = 1,07 \text{ kPa}$ (după Tabele), (3)

dar $U = \rho_v / \rho_s \rightarrow \rho_s(t) = \rho_v / U = \rho_s(t_r) / U = 2,14 \text{ kPa}$, (4)

ceea ce corespunde temperaturii $t = 18,5^\circ\text{C}$ (după Tabele) (deosebirea dintre temperatura punctului de rouă, obținută prin răcire izocoră sau prin răcire izobară, este mică).

6.2.3. Într-o cameră de volum $V = 50 \text{ m}^3$ temperatura aerului este $t = 20^\circ\text{C}$ și punctul de rouă izobar $t_r = 12^\circ\text{C}$. a) Aflați umiditatea absolută și cea relativă, precum și masa vaporilor din cameră. b) Dar dacă punctul de rouă $t_r = 12^\circ\text{C}$ este obținut prin răcire izocoră a unei probe de aer ?

Rezolvare. Analog problemei precedente :

$$\text{a) } \rho_v = \rho_s(t_r) = 1,40 \text{ kPa} , \quad (1)$$

$$U = \rho_v / \rho_s(t) = \rho_s(t_r) : \rho_s(t) = 60 \% , \quad (2)$$

$$\rho_s(t_r) = 10,7 \text{ g/m}^3 , \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \rho_v &= \mu \rho_v / (RT) = [\mu \rho_s(t_r) / (RT_r)] (T_r / T) = \\ &= \rho_s(t_r) (T_r / T) = 10,4 \text{ g/m}^3 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{(ceea ce se putea scrie direct) , } m_v = \rho_v V = 0,52 \text{ kg} . \quad (5)$$

$$\text{b) } \rho_v = \rho_s(t_r) = 10,7 \text{ g/m}^3 ,$$

$$U = \rho_v / \rho_s = \rho_s(t_r) : \rho_s(t) = 62 \% , \quad (6)$$

$$m_v = \rho_v V = 0,535 \text{ kg} . \quad (7)$$

6.2.4. Într-un vas închis se află aer umed la temperatura $t_1 = 27^\circ\text{C}$, având umiditatea relativă $U_1 = 60\%$, ($p_s(t_1) = 3,56 \text{ kPa}$). Cât devine umiditatea relativă dacă încălzim vasul cu aerul până la $t_2 = 100^\circ\text{C}$?

Rezolvare. $U_1 = \rho_{v1} / \rho_{s1}$, dar prin încălzire izocoră :

$$\begin{aligned} \rho_{v2} / \rho_{v1} &= T_2 / T_1 , \quad U_2 = \rho_{v2} / \rho_{s2} = (\rho_{v1} / \rho_{s2}) \cdot (T_2 / T_1) = \\ &= U_1 (\rho_{s1} / \rho_{s2}) \cdot (T_2 / T_1) = 2,6 \% , \end{aligned} \quad (1)$$

unde $\rho_{s2} = \rho_0$ - presiunea normală deoarece $t_2 = 100^\circ\text{C}$.

6.2.5. La temperatura $t_1 = 17^\circ\text{C}$ umiditatea relativă este $U_1 = 60\%$. Aflați umiditatea relativă la temperatura $t_2 = 24^\circ\text{C}$, dacă : a) umiditatea absolută nu se schimbă, b) presiunea vaporilor nu se schimbă .

$$\text{Rezolvare. a) } \rho_v = U_1 \rho_s(t_1) = 8,7 \text{ g/m}^3 , \quad (1)$$

$$U_2 = \rho_v : \rho_s(t_2) = U_1 \cdot \rho_s(t_1) : \rho_s(t_2) = 40 \% . \quad (2)$$

$$b) \rho_v = U_1 \rho_s(t_1) = 1,16 \text{ kPa} , \quad (3)$$

$$U_2 = \rho_v : \rho_s(t_2) = U_1 \rho_s(t_1) : \rho_s(t_2) = 39 \% . \quad (4)$$

Umiditatea **relativă** scade prin creșterea temperaturii (încălzire). Dimpotrivă, prin scăderea temperaturii (răcire) umiditatea relativă crește și se ajunge la $U = 100 \%$ când vaporii devin saturați și începe condensarea lor.

6.2.6. Într-un salon de volum $V = 600 \text{ m}^3$, la temperatura $t_1 = 20^\circ\text{C}$, umiditatea este $U = 60 \%$. Ce masă de apă trebuie evaporată pentru a păstra aceeași umiditate relativă la $t_2 = 30^\circ\text{C}$?

Rezolvare. $U = \rho_v / \rho_s$, atunci din ecuația de stare obținem :

$$m_{v1} = \mu \rho_{v1} V / (RT_1) = \mu U \rho_{s1} V / (RT_1) , \quad m_{v2} = \mu U \rho_{s2} V / (RT_2) , \quad (1)$$

$$\Delta m = m_{v2} - m_{v1} = (\mu V / R) U (\rho_{s2} / T_2 - \rho_{s1} / T_1) = 4,6 \text{ kg} , \quad (2)$$

unde $\rho_{s1,2}$ se iau din Tabele.

6.2.7. Într-o incintă (vidată) de volum $V = 3,0 \text{ m}^3$ se introduce la aceeași temperatură un volum $V_1 = 2,0 \text{ m}^3$ aer cu umiditatea $U_1 = 30 \%$ și un volum $V_2 = V - V_1 = 1,0 \text{ m}^3$ aer cu umiditatea $U_2 = 20 \%$. Care va fi umiditatea în incintă?

$$\text{Rezolvare. } U = \rho_v / \rho_s = (1 / \rho_s) [\rho_{v1} V_1 / V + \rho_{v2} V_2 / V] , \quad (1)$$

unde în paranteze sunt presiunile *parțiale* din amestec ale vaporilor proveniți de la cele două volume (prin destindere *izotermă* de la $V_{1,2}$ la V). $U = (1 / \rho_s) [U_1 \rho_s V_1 / V + U_2 \rho_s V_2 / V] =$

$$= (U_1 V_1 + U_2 V_2) : V = 27 \% . \quad (2)$$

6.2.8. Aflați raportul dintre densitatea aerului uscat și densitatea aerului umed cu umiditatea $U = 50 \%$, la presiunea $p = 100 \text{ kPa}$ și temperatura $t = 20^\circ\text{C}$.

Rezolvare. Masa aerului uscat, respectiv umed, se obține din ecuația de stare :

$$m = \mu_a p V / (RT) , \text{ respectiv } m' = \mu_a p_a V / (RT) + \mu_v p_v V / (RT) , \quad (1)$$

$$\text{unde } p = p_a + p_v = p_a + U p_s , \quad (2)$$

$$m' = \mu_a (p - U p_s) V / (RT) + \mu_v U p_s V / (RT) , \quad (3)$$

$$\rho / \rho' = m / m' = \mu_a p : [\mu_a (p - U p_s) + \mu_v U p_s] = 1,004 . \quad (4)$$

6.2.9. Într-un cilindru se află aer cu umiditatea relativă $U_1 = 60 \%$ la temperatura $t_1 = 10^\circ\text{C}$. Cât devine umiditatea relativă dacă mărim temperatura până la $t_2 = 100^\circ\text{C}$ și micșorăm volumul de $k = 4,0$ ori ?

$$\text{Rezolvare. } p_{v1} = U_1 p_{s1}, \quad p_{v1} V / T_1 = p_{v2} (V/k) / T_2, \quad (1)$$

$$p_{v2} = p_{v1} k T_2 / T_1 = 380 \text{ Pa} < p_{s2} = p_0, \quad (2)$$

deci vaporii, în adevăr, nu devin saturați,

$$U_2 = p_{v2} / p_{s2} = (p_{v1} / p_{s2}) k T_2 / T_1 = U_1 (p_{s1} / p_{s2}) k T_2 / T_1 = 3,7 \%; \quad (3)$$

unde $p_{s2} = p_0$ - presiunea normală ($t_2 = 100^\circ\text{C}$).

6.2.10. Pentru a afla umiditatea aerului la $t_1 = 18^\circ\text{C}$ s-a luat un volum de aer într-un cilindru cu piston, s-a încălzit izocor până la $t_2 = 30^\circ\text{C}$ și apoi s-a comprimat izoterm. S-a observat că condensarea a început când presiunea a crescut izoterm de $n = 10$ ori. Aflați umiditatea relativă a aerului inițial.

Rezolvare. Prin încălzire izocoră p_{v1} nu se schimbă, iar prin comprimare izotermă: $p_{v2} = p_{s2} = n p_{v1}$, deci

$$U = p_{v1} / p_{s1} = p_{s2} / (n p_{s1}) = 19,7 \%.$$

6.2.11. Într-un vas închis se află aer umed la temperatura $t_1 = 100^\circ\text{C}$ și umiditatea $U_1 = 3,5 \%$. Cât devine umiditatea dacă temperatura scade la $t_2 = 29^\circ\text{C}$?

Rezolvare. Ecuația de stare se scrie:

$$(m/\mu)RT_1 = p_{v1} V = U_1 p_{s1} V;$$

$$p_{v2} V = (m/\mu)RT_2 = U_1 p_{s1} V \cdot T_2 / T_1, \quad (1)$$

$$U_2 = p_{v2} / p_{s2} = (U_1 p_{s1} / p_{s2}) \cdot T_2 / T_1 = 72 \%, \quad (2)$$

unde $p_{s1} = p_0$ - presiunea normală ($t_1 = 100^\circ\text{C}$). Prin răcire umiditatea relativă crește (scad p_s , p_s).

6.2.12. Un vas închis conține aer de umiditate $U_1 = 76 \%$ la temperatura $t_1 = 25^\circ\text{C}$. Care va fi umiditatea relativă a aerului dacă îl încălzim până la $t_2 = 100^\circ\text{C}$ și îi micșorăm volumul de $n = 10$ ori ?

$$\text{Rezolvare. } m_v = p_{v1} V = U_1 p_{s1} V, \quad (1)$$

$$U_2 = m_v / m_{s2} = U_1 p_{s1} V : (p_{s2} V / n) = U_1 p_{s1} n : p_{s2} = 23 \%, \quad (2)$$

unde $p_{s1,2}$ se iau din Tabele.

6.2.13. Într-un vas închis umiditatea relativă este $U = 30 \%$. Introducând $m = 0,10$ g apă, vaporii din vas devin saturați cu densitatea $\rho_s = 17,3$ g/m³. Aflați volumul vasului.

Rezolvare. Ecuația de stare în cele două cazuri:

$$p_v V = U p_s V = (m_v / \mu) RT;$$

$$\rho_s V = [(m_v + m) / \mu] RT, \quad \rho_s = \mu \rho_s / (RT). \quad (1)$$

Din primele două ecuații prin scădere obținem :

$$(1 - U)\rho_s V = (m / \mu)RT = m (\rho_s / \rho_s) \rightarrow V = m / [\rho_s(1 - U)] = 8,3 \text{ L.} \quad (2)$$

6.2.14. Aflați umiditatea aerului la temperatura $t = 22^\circ\text{C}$ și presiunea normală p_0 , știind că prin comprimarea izotermă a unei probe din acest aer până la presiunea $p = 6,0 \text{ atm}$ s-a obținut aer cu punctul de rouă (izocor) $t_r = 10,0^\circ\text{C}$.

$$\text{Rezolvare. } \rho_v(t, p) = \rho_s(t_r), \text{ dar } \rho_v(t, p) = \rho_v(t, p_0) p / p_0, \quad (1)$$

$$U = \rho_v(t, p_0) : \rho_s(t) = \rho_v(t, p) (p_0 / p) : \rho_s(t) = \\ = [\rho_s(t_r) / \rho_s(t)] \cdot (p_0 / p) = 8,1 \%. \quad (2)$$

6.2.15. Aerul la temperatura $t_1 = 20^\circ\text{C}$ are umiditatea relativă $U = 70 \%$. Ce masă de vapori se condensează dintr-un volum $V = 10 \text{ m}^3$ aer, dacă temperatura coboară la $t_2 = 10^\circ\text{C}$?

$$\text{Rezolvare. } \Delta m = m_1 - m_2 = \mu \rho_{v1} V / (RT_1) - \mu \rho_{s2} V / (RT_2) = \\ = (\mu V / R) (U \rho_{s1} / T_1 - \rho_{s2} / T_2) = 27 \text{ g}.$$

6.2.16. Noaptea, la temperatura $t_1 = 7,0^\circ\text{C}$ și umiditatea relativă $U_1 = 80 \%$, presiunea aerului este normală. Cât devine presiunea atmosferică ziua, dacă temperatura crește la $t_2 = 12^\circ\text{C}$, iar umiditatea scade la $U_2 = 60 \%$, în ipoteza că rămâne neschimbată: a) densitatea parțială a aerului, b) presiunea parțială a aerului ?

Rezolvare. a) Dacă densitatea parțială a aerului nu se schimbă, înseamnă că masa parțială a aerului din orice volum dat nu se schimbă, dar atunci presiunea parțială a aerului $H_1 - p_{v1}$ se schimbă izocor și presiunea atmosferică finală va fi :

$$H_2 = p_{v2} + (H_1 - p_{v1}) \cdot T_2 / T_1 = \\ = U_2 \rho_{s2} + (H_1 - U_1 \rho_{s1}) \cdot T_2 / T_1 = 103,0 \text{ kPa}. \quad (1)$$

b) În acest caz presiunea parțială a aerului $H_1 - p_{v1}$ nu se schimbă și presiunea atmosferică finală va fi :

$$H_2 = p_{v2} + (H_1 - p_{v1}) = U_2 \rho_{s2} + (H_1 - U_1 \rho_{s1}) = 101,36 \text{ kPa}. \quad (2)$$

6.2.17. Aerul umed dintr-un cilindru cu piston are temperatura $t_1 = 27^\circ\text{C}$, presiunea $p_1 = 101,15 \text{ kPa}$ și umiditatea $U_1 = 70 \%$. Aflați umiditatea și presiunea aerului dacă îl încălzim până la $t_2 = 37^\circ\text{C}$ și îi micșorăm volumul de $n = 3,0$ ori.

$$\text{Rezolvare. } \rho_{v1} = U_1 \rho_{s1} = 2,493 \text{ kPa}, \quad (1)$$

$p_{v2} = p_{v1} [V : (V/n)] T_2 / T_1 = 7,7 \text{ kPa} > p_{s2} = 6,27 \text{ kPa}$, (2)
 deci vaporii devin saturați (o parte se condensează) și $U_2 = 100 \%$.

Presiunea aerului umed în starea finală se compune din presiunea aerului uscat și presiunea vaporilor saturați :

$$p_2 = (p_1 - p_{v1})[V : (V/n)](T_2 / T_1) + p_{s2} = 3,08 \text{ atm} . \quad (3)$$

Se condensează masa de vapori $m_v = \rho_{v1} V - \rho_{s2} V/n$.

6.2.18. Rezervorul unui termometru cu gaz la volum constant este umplut cu aer. La 0°C presiunea aerului din rezervor este normală (p_0). La temperatura măsurată presiunea a devenit $p = 108,657 \text{ kPa}$. Aflați temperatura măsurată dacă aerul din rezervorul termometrului : a) era uscat, b) era de fapt umed, având umiditatea $U = 60 \%$ la temperatura $t' = 20^\circ\text{C}$.

Rezolvare. a) Transformarea izocoră a aerului uscat, considerat gaz ideal : $T = T_0 \cdot p / p_0 = 293 \text{ K} = 20^\circ\text{C}$. (1)

b) Densitatea vaporilor de apă :

$$\rho_v = U \rho_s' = 10,38 \text{ g/m}^3 > \rho_{s0} (0^\circ\text{C}) = 4,84 \text{ g/m}^3 , \quad (2)$$

deci la 0°C o parte din vapori sunt condensați. Atunci presiunea aerului umed p la temperatura măsurată T se compune din presiunea parțială a aerului uscat plus presiunea parțială a vaporilor de apă :

$$\begin{aligned} p &= (p_0 - \rho_{s0}) T / T_0 + \rho_v' T / T' = \\ &= (p_0 - \rho_{s0}) T / T_0 + U \rho_v' T / T' , \end{aligned} \quad (3)$$

de unde

$$T = p : [(p_0 - \rho_{s0}) / T_0 + U \rho_v' / T'] = 291 \text{ K} = 18^\circ\text{C} . \quad (4)$$

6.2.19. Cu cât devine mai greu un balon de volum $V=10 \text{ m}^3$ dacă umiditatea aerului atmosferic exterior crește cu $\Delta U=18\%$ la temperatura $t = 14^\circ\text{C}$ și aceeași presiune atmosferică (totală) ?

Rezolvare. $\Delta G = \Delta(mg - F_A) = - \Delta F_A = - \Delta m_{\text{dezl.}} g$. (1)

Din ecuația de stare avem :

$$\begin{aligned} m_{\text{dezl.}} &= (\mu_{\text{aer}} \rho_{\text{aer}} + \mu_v \rho_v) V / (RT) = \\ &= [V / (RT)] [\mu_{\text{aer}}(\rho - \rho_v) + \mu_v \rho_v] = [V / (RT)] [\mu_{\text{aer}} \rho - (\mu_{\text{aer}} - \mu_v) \rho_v] = \\ &= [V / (RT)] [\mu_{\text{aer}} \rho + (\mu_v - \mu_{\text{aer}}) U \rho_s] , \end{aligned} \quad (2)$$

$$\Delta m_{\text{dezl.}} = [V / (RT)] (\mu_v - \mu_{\text{aer}}) \Delta U \rho_s = (V \rho_s / \mu_v) (\mu_v - \mu_{\text{aer}}) \Delta U , \quad (3)$$

$$\Delta G = - \Delta m_{\text{dezl.}} g = \Delta U \rho_s V g (\mu_{\text{aer}} / \mu_v - 1) = 0,13 \text{ N} . \quad (4)$$

Observăm că aerul umed este mai ușor decât cel uscat , de aceea greutatea aerului dezlocuit, ca și forța arhimedică, a scăzut și deci greutatea aparentă a crescut .

6.2.20. Într-un cilindru vertical, cu piston de diametru $D = 5,0$ cm, se află la fund o mică scobitură cilindrică (verticală) de diametru $d = 2,0$ mm în care s-a strâns o peliculă fină de apă. La temperatura constantă $t = 20^\circ\text{C}$ pistonul este coborât încet pe o distanță $H = 10$ cm, iar în scobitură se strânge puțină apă, astfel încât nivelul apei crește cu $h = 1,0$ mm. Aflați presiunea vaporilor saturați ai apei la temperatura de mai sus.

Rezolvare. Masa vaporilor condensați din volumul $V = (\pi D^2/4)H$ este

$$m_v = \rho_{\text{ap}} \cdot (\pi d^2/4)h, \quad (1)$$

atunci din ecuația de stare obținem : $p_s = (m_v/\mu) RT/V =$

$$= (1/\mu) \rho_{\text{ap}} \cdot (\pi d^2/4)h \cdot RT : [(\pi D^2/4)H] =$$

$$= (\rho_{\text{ap}}/\mu)(d/D)^2 (h/H) RT = 2,16 \text{ kPa} . \quad (2)$$

6.2.21. Într-un cilindru cu piston se găsește aer și vapori saturați ai apei. Deplasând pistonul, volumul este mărit de $n_1 = 4,0$ ori și în același timp se introduc vapori, astfel încât masa vaporilor crește de $n_2 = 2,0$ ori. Totul se petrece la temperatură constantă. Aflați umiditatea relativă în starea finală.

Rezolvare. Mărind izoterm volumul, vaporii devin imediat nesaturați (fiindcă presiunea scade, nefiind prezentă apa care să se evapore) și presiunea lor finală va fi (după Boyle-Mariotte) $p_v' = p_s/n_1$. Dar introducând vapori suplimentar, astfel încât masa vaporilor devine de $n_2 < n_1$ ori mai mare, vom avea presiunea finală a vaporilor $p_v'' = p_v' n_2 = p_s n_2/n_1$, deci umiditatea relativă a aerului în starea finală :

$$U = p_v''/p_s = n_2/n_1 = 50 \% .$$

6.2.22. Într-un pahar cilindric cu aria secțiunii transversale $S = 30 \text{ cm}^2$ se află $m = 200$ g gheață la temperatura $T = 272$ K, presiunea vaporilor saturați fiind $p_s = 550$ Pa. Ce presiune se va exercita asupra gheții, dacă paharul este așezat în vid și în cât timp sublimază gheața ?

Rezolvare. Dacă paharul este închis, atunci la echilibru termic, sublimază și se condensează fluxuri de masă egale : $(1/4) \rho_s \bar{v} S$. Prin condensare acest flux de masă aduce spre gheață un anumit impuls pe secundă, deci exercită o anumită forță, iar prin sublimare acest flux duce cu el același impuls pe secundă (la echilibru termic), deci gheața va căpăta un recul, deci fiecare flux contribuie în mod egal la forța exercitată asupra gheții.

250

Dar la echilibru termic, în aceste condiții presiunea este p_s . Dacă acum deschidem paharul în vid, fluxul moleculelor emergente rămâne același, dar dispare fluxul moleculelor incidente, deci presiunea asupra gheții va fi $p_0 / 2$.

Timpul de sublimare este dat de fluxul moleculelor emergente:

$$t = m : [(1/4) \rho_s \bar{v} S] = [4mRT / (\mu p_s S)] : \sqrt{8RT / (\pi \mu)} = 100 \text{ s} .$$

În această problemă trebuie cunoscută expresia fluxului de particule: $(1/4) n \bar{v} S$ sau de masă: $(1/4) \rho \bar{v} S$, precum și formula vitezei medii: $\bar{v} = \sqrt{8RT / (\pi \mu)}$.

6.2.23. La umiditatea relativă $U_1 = 50\%$ apa dintr-o farfurioară se evaporă în aer liber în $t_1 = 40$ min. În cât timp se va evapora aceeași apă la umiditatea $U_2 = 80\%$, la aceeași temperatură ?

Rezolvare. Putem folosi direct formula vitezei de evaporare (masa evaporată în unitatea de timp :

$$v = KS(p_s - p_v) / H = KSp_s(1 - U) / H ; \quad (1)$$

$$v_1 = [KSp_s / H] (1 - U_1) , \quad v_2 = [KSp_s / H] (1 - U_2) , \quad (2)$$

$$v_1 / v_2 = (m / t_1) : (m / t_2) = t_2 / t_1 = (1 - U_1) / (1 - U_2) ,$$

$$t_2 = t_1 \cdot (1 - U_1) / (1 - U_2) = 100 \text{ min} . \quad (3)$$

6.2.24. În figură este reprezentată izoterma aerului umed dintr-o încăpere. Se cunosc presiunile parțiale ale aerului : $p_{1,2}$. Aflați umiditatea relativă în cele 3 puncte .

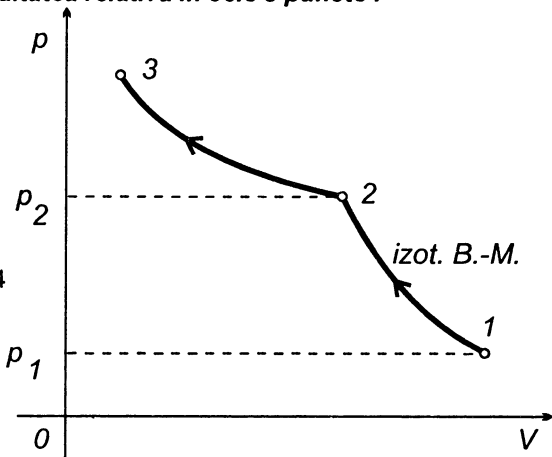


Fig.6.2.24

Rezolvare. Graficul are două porțiuni distincte, de aceea porțiunea 1 - 2 corespunde comprimării *izoterme Boyle-Mariotte* a aerului și vaporilor *nesaturanți*, care devin *saturanți* în punctul 2, după care, de la 2 la 3, avem comprimarea izotermă a aerului și condensarea vaporilor *saturanți*. Aceasta înseamnă că umiditatea $U_2 = 100\%$, $U_3 = 100\%$.

$$U_1 = p_{v1} / p_s, \text{ dar } p_s = p_{v2}, \quad (1)$$

iar $p_{v1,2}$ sunt legați prin transformarea *Boyle-Mariotte* :

$$p_{v1} / p_{v2} = V_2 / V_1 = p_1 / p_2, \quad (2)$$

deci

$$U_1 = p_{v1} / p_s = p_{v1} / p_{v2} = p_1 / p_2. \quad (3)$$

6.2.25. Dacă comprimăm izoterm un volum de aer umed de 4 ori, presiunea sa crește de 3 ori, iar dacă îl comprimăm de 8 ori, presiunea sa crește de 5 ori. Aflați umiditatea relativă a aerului.

Rezolvare. Deoarece presiunea n-a crescut de 4 ori (respectiv de 8 ori), cum o cere izoterma gazului ideal, înseamnă că se produce *condensarea*. Presiunea parțială p_a a aerului verifică *legea Boyle- Mariotte*, astfel încât, dacă în starea inițială $p = p_a + p_v = p_a + Up_s$, atunci în starea finală o să avem :

$$3p = 3(p_a + Up_s) = 4p_a + p_s, \quad (1)$$

$$5p = 5(p_a + Up_s) = 8p_a + p_s. \quad (2)$$

Transcriem aceste ecuații astfel :

$$p_a = (3U - 1)p_s, \quad 3p_a = (5U - 1)p_s. \quad (3)$$

Prin împărțirea acestor ecuații membru la membru rezultă :

$$3 = (5U - 1) / (3U - 1) \rightarrow U = 0,50 = 50\%. \quad (4)$$

* * *

7. CALORIMETRIE

7.1. Calorimetrie simplă

7.1.1. Un corp, încălzit până la temperatura $t_1 = 100^\circ\text{C}$, este cufundat într-un calorimetru cu lichid a cărui temperatură crește de la $t_2 = 20^\circ\text{C}$ până la $t_3 = 30^\circ\text{C}$. Ce temperatură finală se obține, dacă se mai cufundă un corp identic încălzit până la $t_4 = 50^\circ\text{C}$?

Rezolvare. Fie C_1 - capacitatea calorică a corpului și C_2 - capacitatea calorică a calorimetrului cu lichid. Avem pentru prima cufundare :

$$Q_{\text{ced}} = C_1(t_1 - t_3) = Q_{\text{prim}} = C_2(t_3 - t_2) . \quad (1)$$

La cufundarea corpului al doilea :

$$C_1(t_4 - \theta) = C_1(\theta - t_3) + C_2(\theta - t_3) . \quad (2)$$

Introducând aici pe C_2 din (1), se elimină C_1 și găsim :

$$\theta = [t_3(t_1 + t_4) - t_2(t_3 + t_4)] : (t_1 + t_3 - 2t_2) = 32,2^\circ\text{C} . \quad (3)$$

7.1.2. Două lichide cu căldurile specifice $c_{1,2}$ și temperaturi inițiale diferite sunt introduse într-un calorimetru. După stabilirea echilibrului termic diferența dintre temperatura unui lichid și temperatura de echilibru este de două ori mai mică decât diferența temperaturilor inițiale. Aflați raportul maselor celor două lichide.

Rezolvare. Ecuația calorimetrică se scrie:

$$Q_{\text{ced}} = m_1 c_1 (t_1 - \theta) = Q_{\text{prim}} = m_2 c_2 (t_2 - \theta) . \quad (1)$$

Dar conform enunțului :

$$t_1 - \theta = (t_1 - t_2)/2 \quad \text{sau} \quad t_2 - \theta = (t_2 - t_1) / 2 . \quad (2)$$

Din ecuațiile (1) și (2) rezultă (în ambele variante) :

$$m_1 c_1 (t_1 - t_2) / 2 = - m_2 c_2 (t_2 - t_1) / 2 , \quad m_1 / m_2 = c_2 / c_1 . \quad (3)$$

7.1.3. Dacă în apa dintr-un calorimetru se toarnă un pahar de apă fierbinte, temperatura din calorimetru crește cu $\Delta t_1 =$

= 5,0 K . **Dacă mai turnăm un pahar de apă fierbinte, temperatura apei mai crește încă cu $\Delta t_2 = 3,0$ K. Cu câte grade va mai crește în continuare temperatura apei din calorimetru dacă mai turnăm în continuare $N = 45$ pahare de apă fierbinte ? Se neglijează pierderile de căldură și capacitatea calorică a vasului. Care va fi creșterea de temperatură dacă în loc de $N = 45$ pahare adăugăm un număr foarte mare de pahare de apă fierbinte ?**

Rezolvare. La turnarea primului pahar de apă fierbinte (t °C), a celui de-al doilea și a celor N pahare avem ecuația calorimetrică

$$Q_{\text{prim}} = mc\Delta t_1 = Q_{\text{ced}} = m_0 c(t - \theta) = m_0 c\Delta t \quad (1)$$

(θ - prima temperatură de echilibru termic),

$$(m + m_0)c\Delta t_2 = m_0 c(t - \theta') = m_0 c(t - \theta + \theta - \theta') ,$$

dar $\Delta t_2 = \theta' - \theta$, deci $(m + m_0)c\Delta t_2 = m_0 c(\Delta t - \Delta t_2)$, (2)

$$(m + 2m_0)c\Delta t_N = Nm_0 c(t - \theta'') = Nm_0 c(t - \theta + \theta - \theta' + \theta' - \theta'') = Nm_0 c(\Delta t - \Delta t_2 - \Delta t_N) . \quad (3)$$

Din prima ecuație scoatem pe m și îl introducem în (2) și (3) :

$$(\Delta t / \Delta t_1 + 1) \Delta t_2 = \Delta t - \Delta t_2 , \quad (4)$$

$$(\Delta t / \Delta t_1 + 2) \Delta t_N = N(\Delta t - \Delta t_2 - \Delta t_N) . \quad (5)$$

Scoatem Δt din (4) și îl introducem în (5), după care aflăm pe Δt_N :

$$\Delta t = 2 \Delta t_1 \Delta t_2 : (\Delta t_1 - \Delta t_2) , \quad (6)$$

$$\Delta t_N = N \Delta t_2 (\Delta t_1 + \Delta t_2) : [N(\Delta t_1 - \Delta t_2) + 2 \Delta t_1] = 10,8 \text{ K} . \quad (7)$$

Transcriem (7) astfel :

$$\Delta t_N = \Delta t_2 (\Delta t_1 + \Delta t_2) : (\Delta t_1 - \Delta t_2 + 2 \Delta t_1 / N) , \quad (8)$$

de unde se vede imediat că pentru N foarte mare ($N \rightarrow \infty$) ultimul termen de la numitor se anulează și rămâne :

$$\Delta t_{\text{max}} = \Delta t_2 \cdot (\Delta t_1 + \Delta t_2) : (\Delta t_1 - \Delta t_2) = 12 \text{ K} . \quad (9)$$

7.1.4. Pentru a afla randamentul unui bec electric de putere $P = 100$ W, acesta a fost cufundat într-un calorimetru cu pereți transparenți , conținând $m = 1,00$ kg apă. După $\tau = 5,0$ min apa s-a încălzit cu $\Delta t = 6,8^\circ\text{C}$. Aflați randamentul becului electric.

Rezolvare. Energia dezvoltată în filamentul becului, $P \tau$, se compune din energia luminoasă utilă, care trece prin pereții transparenți ai becului și calorimetrului, și deci nu este preluată de apa din calorimetru, și din energia calorică (termică) inutilă preluată de apa din calorimetru , $mc\Delta t$:

$$254 \quad \eta = (P \tau - mc\Delta t) : (P \tau) = 5,0 \% .$$

7.1.5. Un transformator este solicitat de consumator la o putere $P = 45 \text{ kW}$, mai mare decât puterea de regim. Datorită supraîncărcării transformatorului, masa $m = 45 \text{ kg}$ de ulei în care este cufundat transformatorul se încălzește cu $\Delta T = 15 \text{ K}$ în timpul $\tau = 5,0 \text{ min}$. Știind că $f = 90 \%$ din căldura degajată se transmite uleiului, evaluează randamentul transformatorului în acest caz.

Rezolvare. Energia $P \tau$ solicitată de consumator este energia utilă. Energia totală dezvoltată se compune din această energie utilă plus căldura degajată. În regim nominal, staționar, această căldură reprezintă circa 2% din puterea totală. Prin supraîncărcarea transformatorului uleiul va începe să se supraîncălzească, preluând o fracțiune f din această căldură (restul fiind preluat de alte materiale și disipat în mediu). Neglijând căldura corespunzătoare regimului staționar, putem scrie pentru energia totală: $\approx P \tau + mc\Delta T / f$. Prin urmare, $\eta < P \tau : (P \tau + mc\Delta T / f) = 90 \%$, rezultatul justifică neglijarea făcută.

7.1.6. Arătați că variația de volum a unui corp solid sau lichid, datorită absorbirii unei cantități date Q de căldură, nu depinde de volumul inițial al corpului.

$$\text{Rezolvare. } Q = mc\Delta T = \rho_0 V_0 c \Delta T, \quad (1)$$

$$\Delta V = V_0 \gamma \Delta T = V_0 \gamma Q / (\rho_0 V_0 c) = \gamma Q / (\rho_0 c). \quad (2)$$

7.1.7. Cu ajutorul unui termoplonjor de putere $P = 100 \text{ W}$ nu reușim să aducem la fierbere un volum $V = 1,00 \text{ L}$ de apă dintr-un vas. După un timp suficient de lung scoatem termoplonjorul din apă. În cât timp temperatura apei scade cu $\Delta t = 1,0 \text{ grad}$?

Rezolvare. Ajungând la regim staționar, la o temperatură t_{ap} apropiată de temperatura de fierbere, vasul cu apa pierde spre exterior o putere calorică exact egală cu P . Scoțând termoplonjorul pierderea de căldură spre exterior rămâne practic aceeași atâta timp cât scăderea de temperatură $\Delta t \ll t_{ap}$, cum este cazul în problemă. Prin urmare,

$$mc\Delta t \approx P \tau \rightarrow \tau = mc\Delta t / P = 42 \text{ s}.$$

7.1.8. Într-un vas cu apă se introduce un termoplonjor și se măsoară temperatura apei în funcție de timp, obținându-se tabelul de mai jos. a) Aflați cu câte grade se va răci apa într-un minut, dacă deconectăm termoplonjorul la temperatura $t = 50^\circ\text{C}$. b) Va ajunge să fiarbă apa dacă lăsăm termoplonjorul mult timp conectat ?

τ , min	0	1	2	3	4
t , °C	20,0	26,2	31,8	36,8	41,4

5	6	7	8	9	10
45,6	49,3	52,7	55,8	58,5	61,1

Rezolvare. Să calculăm creșterea de temperatură pe minut θ^* în funcție de temperatură. Luăm două momente alăturate, calculăm creșterea (diferența) de temperatură și o prescriem temperaturii medii a intervalului ales ; obținem tabelul :

t , °C	23,1	29,0	34,3	39,1	43,5
θ^* , K/min	6,2	5,6	5,0	4,6	4,2

47,45	51,0	54,25	57,15	59,8
3,7	3,4	3,1	2,7	2,6

Creșterea de temperatură pe minut θ^* , reprezentată grafic, se apropiează bine printr-o *dreaptă*. Extrapolând până la intersecția cu axa temperaturilor, când $\theta^* \rightarrow 0$, obținem imediat temperatura maximă posibilă $t_{\max} \approx 85$ °C .

Din grafic se mai vede că pentru $t = 50$ °C apa se încălzește cu $\theta^* \cong 3,5$ K/min, iar pentru $t_m = 20,0$ °C (temperatura mediului ambiant) cu $\theta^* \cong 6,5$ K/min .

Vom folosi *legea lui Newton* pentru răcirea (sau încălzirea) unui corp solid într-un mediu fluid (lichid sau gaz) :

Căldura schimbată între solid și fluid pe unitatea de timp (fluxul de căldură) este proporțională cu aria prin care se face schimbul de căldură și cu diferența de temperatură dintre solid și mediul fluid :

$$Q^* = KS(t - t_m) . \quad (1)$$

În cazul problemei noastre puterea calorică P dezvoltată de termoplonjor merge pentru încălzirea apei pe unitatea de timp , $mc\theta^*$, și pentru încălzirea mediului conform lui (1) :

$$P = mc\theta^* + KS(t - t_m) . \quad (2)$$

Dacă facem aici $t = t_m$, obținem

$$P = mc\theta_m^* , \text{ deci } mc(\theta_m^* - \theta^*) = KS(t - t_m) . \quad (3)$$

Pe de altă parte, dacă deconectăm termoplonjorul, căldura schimbată cu mediu pe unitatea de timp (1) duce la o micșorare a temperaturii apei pe unitatea de timp :

$$Q^* = KS(t - t_m) = mc \cdot (-\Delta t / \Delta \tau) . \quad (4)$$

Ținând seama de (3) :

$$mc \cdot (-\Delta t / \Delta \tau) = mc(\theta_m^* - \theta^*) \rightarrow$$

$$-\Delta t / \Delta \tau = \theta_m^* - \theta^* = 3 \text{ grad/min} . \quad (5)$$

Scăderea de temperatură pe unitatea de timp , $-\Delta t / \Delta \tau$, după deconectarea termoplonjorului, este chiar diferența dintre creșterea de temperatură pe unitatea de timp la temperatura mediului, θ_m^* , și creșterea de temperatură pe unitatea de timp la temperatura la care se face deconectarea termoplonjorului.

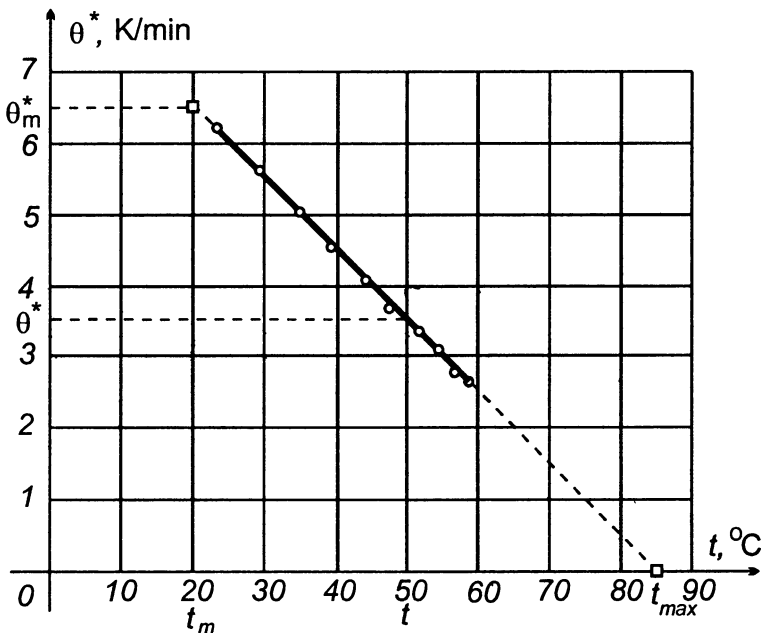


Fig.7.1.8

**** 7.1.9. Temperatura unui termostat de capacitate calorică $C = 300 \text{ J/K}$ este menținută constantă cu $\Delta T = 80 \text{ K}$ deasupra temperaturii mediului ambiant cu ajutorul unui încălzitor electric de putere $P = 100 \text{ W}$ și randament $\eta = 0,80$. Cu câte grade**

δT va coborî temperatura termostatului în timpul $\tau = 5,0$ min după deconectarea încălzitorului ? Se va ține seama de faptul că un corp solid care se răcește într-un mediu fluid pierde în unitatea de timp o cantitate de căldură proporțională cu diferența dintre temperatura corpului și cea a mediului fluid (legea lui Newton).

Rezolvare. În regim staționar :

$$\eta P = \alpha(T_0 - T_m)S = \alpha \Delta T S , \quad (1)$$

unde α este **coeficientul de schimb de căldură** dintre termostat și mediu, S - aria suprafeței prin care se face schimbul de căldură (suprafața termostatului), T_0 - temperatura de regim a termostatului, T_m - temperatura mediului.

În timpul răcirii, să considerăm la un moment dat τ un interval infinitesimal de timp $d\tau$ în care temperatura scade cu $-dT$ și avem bilanțul : căldura pierdută de termostat este pe de o parte $-mcdT$, iar pe de altă parte este dată de formula lui Newton :

$$-mcdT = -CdT = \alpha(T - T_m) S d\tau . \quad (2)$$

Separăm variabilele și integrăm :
$$-\int \frac{dT}{T - T_m} = \int \frac{\alpha S}{C} d\tau ,$$

$$-\ln(T - T_m) = \alpha(S / C) \tau + K ,$$

unde constanta de integrare K se determină din **condiția inițială** : la $\tau = 0$ avem $T = T_0$; $-\ln(T_0 - T_m) = K$, deci

$$\ln[(T - T_m)/(T_0 - T_m)] = -\alpha(S / C) \tau ,$$

$$T - T_m = (T_0 - T_m) e^{-\alpha S \tau / C} . \quad (3)$$

Se poate integra și **definit** (limitele de integrare se corespund):

$$\int_{T_0}^T \frac{dT}{T - T_m} = -\frac{\alpha S}{C} \int_0^\tau d\tau , \quad \ln[(T - T_m)/(T_0 - T_m)] = -\alpha(S / C) \tau ,$$

$$T - T_m = \Delta T e^{-\eta P \tau / (C \Delta T)} \quad (4)$$

$$\text{sau} \quad \delta T = T_0 - T = \Delta T (1 - e^{-\eta P \tau / (C \Delta T)}) . \quad (5)$$

În cazul problemei ($\tau = 5,0$ min) : $\delta T \cong 5,0$ K .

Dacă ar fi $\eta P \tau \ll C \Delta T$, atunci exponențiala s-ar putea aproxima (v. Anexe): $e^x \cong 1 + x$, dacă $|x| \ll 1$, (6)

adică ar fi: $\delta T \cong \eta P \tau / C$ independent de ΔT . (7)

7.2. Topirea și solidificarea

7.2.1. Pentru a determina conținutul de apă în zăpadă umedă, s-a luat o cantitate $m_z = 100$ g zăpadă umedă și s-a introdus într-un calorimetru cu echivalentul în apă $A = 20$ g, conținând $V = 0,60$ L apă la temperatura $t_a = 12^\circ\text{C}$. Temperatura finală a devenit $\theta = 2,0^\circ\text{C}$. Aflați conținutul de apă în procente w % din zăpadă umedă .

Rezolvare. $Q_{\text{prim}} = (m_a + A)c_a(t_a - \theta) =$
 $= Q_{\text{ced}} = (1 - w)m_z \lambda + m_z c_a \theta ,$ (1)

$$w = 1 - [c_a / (m_z \lambda)] [(m_a + A)(t_a - \theta) - m_z \theta] = 25 \% .$$
 (2)

7.2.2. Un calorimetru cu capacitatea calorică $C = 83,6$ J/K conține o cantitate $m_a = 180$ g apă aflată la temperatura $t_a = 15^\circ\text{C}$. Se introduc $m_g = 100$ g gheață aflată la temperatura $t_g = -10^\circ\text{C}$. Aflați temperatura finală de echilibru termic.

Rezolvare. În problemele în care se poate produce topirea sau solidificarea, este bine să facem în prealabil un bilanț al căldurii disponibile prin răcire sau solidificare, respectiv al căldurii necesare pentru încălzire și topire.

În cazul problemei, căldura disponibilă prin răcirea apei și a vasului până la 0°C este

$$Q_{\text{disp}} = (m_a c_a + C)t_a = 12,54 \text{ kJ} .$$
 (1)

Căldura necesară pentru încălzirea gheții și topirea ei :

$$Q_{\text{nec}} = m_g c_g (-t_g) + m_g \lambda = 2,09 \text{ kJ} + 33,5 \text{ kJ} = 35,6 \text{ kJ} .$$
 (2)

Se vede imediat că căldura disponibilă este suficientă pentru a încălzi gheața până la 0°C și a topi numai o parte din ea. Prin urmare, temperatura finală de echilibru va fi 0°C și în calorimetru vom avea apă și gheață în echilibru termic. Masa de gheață care se va topi :

$$m_g' = [Q_{\text{disp}} - m_g c_g (-t_g)] : \lambda_g = 31,2 \text{ g} .$$
 (3)

7.2.3. Într-un calorimetru (de capacitate calorică neglijabilă), conținând $m_a = 2,00$ kg apă la temperatura $t_a = 6,0^\circ\text{C}$, se introduc $m_g = 2,00$ kg gheață la temperatura $t_g = -20^\circ\text{C}$. Aflați temperatura finală de echilibru termic.

Rezolvare. Facem bilanțul căldurilor, analog problemei precedente 7.2.2. Căldura disponibilă prin răcirea apei până la 0°C :

$$Q_{\text{disp}} = m_a c_a t_a = 50,16 \text{ kJ} . \quad (1)$$

Căldura necesară gheții pentru a se încălzi până la 0°C :

$$Q_{\text{nec}} = m_g c_g (-t_g) = 89,6 \text{ kJ} . \quad (2)$$

Aceasta înseamnă că apa se răcește până la 0°C, dar căldura cedată nu este suficientă gheții ca să ajungă la 0°C. Atunci va începe să înghețe apa, astfel încât căldura latentă eliberată să aducă gheața la 0°C. Pentru aceasta este nevoie să înghețe :

$$m_a' = (Q_{\text{nec}} - Q_{\text{disp}}) : \lambda_g = 0,10 \text{ kg} . \quad (3)$$

Deci, temperatura de echilibru va fi 0°C și vom avea gheață inițială adusă la 0°C și apa inițială adusă la 0°C din care o parte m_a' îngheață .

7.2.4. Într-un calorimetru cu echivalentul în apă $A = 50 \text{ g}$, conținând $m_a = 250 \text{ g}$ apă la temperatura inițială $t_a = 10^\circ\text{C}$, se introduce o masă $m = 300 \text{ g}$ cupru, scoasă dintr-un vas cu azot lichid. Aflați temperatura finală de echilibru termic.

Rezolvare. Căldura necesară cuprului ca să ajungă la 0°C :

$$Q_{\text{nec}} = mc(-t) = 16,46 \text{ kJ} ; \quad c = 280 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}) , \quad t = -196^\circ\text{C} . \quad (1)$$

Căldura disponibilă prin răcirea calorimetrului cu apă :

$$Q_{\text{disp}} = (m_a + A)c_a t_a = 12,54 \text{ kJ} . \quad (2)$$

Se vede că această căldură nu este suficientă, de aceea va începe înghețarea apei. Masa de apă care trebuie să înghețe :

$$m_g = (Q_{\text{nec}} - Q_{\text{disp}}) : \lambda = 11,7 \text{ g} . \quad (3)$$

Prin urmare, temperatura finală de echilibru va fi 0°C și va îngheța o parte m_g din apă.

7.2.5. Un cilindru este umplut până la o înălțime $h = 25 \text{ cm}$ cu gheață, peste care se toarnă o coloană de aceeași înălțime de apă la temperatura $t_a = 10^\circ\text{C}$. După stabilirea echilibrului termic nivelul apei a urcat cu $\Delta h = 0,50 \text{ cm}$. Aflați temperatura inițială a gheții.

Rezolvare. Dacă nivelul apei a crescut înseamnă că o parte din apă a înghețat. Ecuația calorimetrică dă :

$$Q_{\text{ced}} = m_a c_a t_a + m_a' \lambda_g = Q_{\text{prim}} = m_g c_g (-t_g) , \quad (1)$$

$$\rho_a Shc_a t_a + m_a' \lambda_g = \rho_g Shc_g (-t_g) , \quad (2)$$

$$\text{dar } \Delta V = S\Delta h = m_a' / \rho_g - m_a' / \rho_a = m_a' (\rho_a - \rho_g) / (\rho_a \rho_g) . \quad (3)$$

$$\rho_a h c_a t_a + \Delta h \lambda_g \cdot (\rho_a \rho_g) / (\rho_a - \rho_g) = \rho_g h c_g (-t_g) , \quad (4)$$

$$t_g = -t_a (c_a / c_g) \rho_a / \rho_g - (\lambda_g / c_g)(\Delta h / h) \rho_a / (\rho_a - \rho_g) = -54^\circ\text{C}. \quad (5)$$

7.2.6. Într-un balon închis de volum $V = 24,9$ L, conținând $m = 4,0$ g He la presiunea atmosferică normală, se introduce $m_g = 1,00$ g gheață aflată la 0°C . Care va fi presiunea finală a heliului ?

Rezolvare. Căldura necesară gheții ca să se topească :

$$Q_{\text{nec}} = m_g \lambda_g = 335 \text{ J}. \quad (1)$$

Căldura disponibilă de la răcirea izocoră a heliului până la 0°C :

$$\begin{aligned} Q_{\text{disp}} &= (m / \mu) C_V (T - T_0) = (m / \mu) (3R / 2) (T - T_0) = \\ &= (3/2) pV - (3/2) (m / \mu) RT_0 = 384,7 \text{ J}. \end{aligned} \quad (2)$$

Prin urmare, se va topi toată gheața. Ecuația calorimetrică dă :

$$Q_{\text{ced}} = (m / \mu) C_V (T - T') = (C_V / R) (p_0 V - pV) =$$

$$Q_{\text{prim}} = m_g \lambda_g + m_g c_a (T' - T_0) = m_g \lambda_g + m_g c_a [\mu pV / (mR) - T_0], \quad (3)$$

de unde rezultă presiunea cerută :

$$p = [p_0 C_V / R + m_g (c_a T_0 - \lambda_g) / V] : [C_V / R + \mu m_g c_a / (mR)] = 90 \text{ kPa}. \quad (4)$$

(Presiunea vaporilor saturanți ai apei este neglijabilă.)

7.2.7. Într-un vas cu apă plutește o bucată de gheață având în interior înghețată o bilă de plumb. Masa gheții $m_g = 1,40$ kg, masa bilei $m = 0,100$ kg, temperatura sistemului 0°C . Ce cantitate minimă de căldură trebuie transmisă sistemului pentru ca bila sigur să înceapă să se scufunde ?

Rezolvare. Considerăm cazul limită al plutirii bilei încorporată în gheață :

$$m_g' + m = \rho_a m_g' / \rho_g + \rho_a m / \rho_{pb} \rightarrow$$

$$m_g' = m (1 - \rho_a / \rho_{pb}) : (\rho_a / \rho_g - 1). \quad (1)$$

Atunci căldura necesară :

$$Q = \lambda_g (m_g - m_g')$$

$$= \lambda_g [m_g - m (1 - \rho_a / \rho_{pb}) : (\rho_a / \rho_g - 1)] = 134 \text{ kJ}. \quad (2)$$

7.2.8. Într-un calorimetru de alamă de masă $m_c = 100$ g se află o bucată de gheață de masă $m_g = 0,40$ kg la temperatura $t_g = -10^\circ\text{C}$. Peste gheață se toarnă o masă $m_{pb} = 0,20$ kg plumb topit la temperatura sa de topire. Aflați temperatura finală de echilibru.

Rezolvare. Căldura necesară calorimetrului cu gheață pentru a se încăzi până la 0°C :

$$Q_{\text{nec}} = (m_c c_c + m_g c_g) (-t_g) = 8,77 \text{ kJ}. \quad (1)$$

Căldura cedată de plumb prin solidificare și răcire până la 0°C :

$$Q_{\text{disp}} = m_{\text{Pb}} \lambda_{\text{Pb}} + m_{\text{Pb}} c_{\text{Pb}} t_{\text{Pb}} = 13,5 \text{ kJ} > Q_{\text{nec}} . \quad (2)$$

Prin urmare, mai rămâne căldură disponibilă pentru a topi o parte din gheață :

$$m_g' = (Q_{\text{disp}} - Q_{\text{nec}}) / \lambda_g = 14,1 \text{ g} , \quad (3)$$

deci temperatura finală de echilibru va fi 0°C și în calorimetru va fi apă, gheață și plumb în echilibru termic.

7.2.9. Apa pură poate fi subrăcită până la $t = -10^\circ\text{C}$ fără a îngheța. Este însă suficient să aruncăm în ea o fărâmă de gheață pentru a provoca înghețarea rapidă a unei părți din apă și revenirea temperaturii la 0°C. Cât la sută din masa apei astfel subrăcite va îngheța ? Căldura specifică a apei subrăcite este apropiată de căldura specifică a apei la 0°C .

Rezolvare. Pentru revenirea temperaturii la 0°C este necesară căldura $mc_a(-t)$, care se obține prin înghețarea unei părți din apă, $m_g\lambda_g$, deci $mc_a(-t) = m_g\lambda_g \rightarrow m_g/m = -c_a(-t)/\lambda_g = 12,5\%$.

7.2.10. Cu anumite precauții apa (pură) poate fi subrăcită sub 0°C fără a îngheța sau supraîncălzită peste 100°C fără a fierbe. Într-un calorimetru de capacitate calorică $q = 1,035 \text{ kJ/K}$ se află $m_1 = 1,00 \text{ kg}$ apă subrăcită până la $t_1 = -10^\circ\text{C}$. Se introduce o cantitate $m_2 = 0,100 \text{ kg}$ apă supraîncălzită până la $t_2 = 110^\circ\text{C}$. Ce temperatură de echilibru se va stabili în calorimetru ?

Rezolvare. Facem în prealabil un bilanț al căldurilor. Căldura necesară apei subrăcite și calorimetrului pentru a ajunge la 0°C :

$$Q_{\text{nec}} = (m_1 c_a + q)(-t_1) = 52,68 \text{ kJ} , \quad c_a = 4233 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)} , \quad (1)$$

Căldura disponibilă, cedată de apa supraîncălzită pentru a ajunge la 0°C :

$$Q_{\text{disp}} = m_2 c_a t_2 = 45,98 \text{ kJ} , \quad c_a = 4180 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)} , \quad (2)$$

deci această căldură nu ajunge apei subrăcite să ajungă la 0°C. Atunci o parte din apa subrăcită va îngheța pentru a elibera căldura latentă :

$$m_g = (Q_{\text{nec}} - Q_{\text{disp}}) / \lambda_g = 20 \text{ g} \quad (3)$$

și temperatura finală de echilibru va fi 0°C, în calorimetru va fi apă și gheață m_g în echilibru termic .

7.2.11. Într-o cameră s-a adus un vas cu apă rece. După $\tau_1 = 10 \text{ min}$ apa s-a încălzit cu $\Delta t = 1,0^\circ\text{C}$. Să se evalueze în cât timp τ_2 se va topi în aceeași cameră și în același vas o masă egală de gheață la 0°C .

Rezolvare. Conform legii lui Newton, de răcire sau încălzire a unui corp solid într-un mediu fluid, căldura schimbată pe unitatea de

262

timp dintre corp și mediu este proporțională cu aria suprafeței prin care se face schimbul de căldură și cu diferența de temperatură dintre solid și mediul fluid.

În cazul nostru afluxul de căldură spre vas în unitatea de timp, rămâne practic *același* (*același* vas, *aceeași* cameră, practic aceeași diferență de temperatură) :

$$\Phi = mc\Delta t / \tau_1 = m \lambda / \tau_2 \rightarrow \tau_2 = \tau_1 \cdot \lambda / (c\Delta t) = 13 \text{ h } 20 \text{ min} .$$

7.2.12. Pentru a determina căldura latentă de topire a bromului a cărui căldură specifică în stare lichidă este $c = 440 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$, s-a luat un vas de capacitate calorică $q = 36 \text{ J}/\text{K}$ în care s-a introdus o masă $m = 100 \text{ g}$ brom solid. Topirea a durat $\tau_1 = 5,5 \text{ h}$, după care temperatura a urcat cu $\Delta t = 2,0^\circ\text{C}$ într-un timp $\tau_2 = 8,0 \text{ min}$. Aflați căldura latentă de topire a bromului.

Rezolvare. Conform legii lui Newton (v. problema precedentă 7.2.11) afluxul de căldură, în unitatea de timp, dinspre mediul ambiant către vas, este practic *constant* în timpul experienței, diferența de temperatură dintre mediu și vas fiind practic *aceeași* :

$$\Phi = m\lambda / \tau_1 = (mc + q)\Delta t / \tau_2, \quad \lambda = (c + q/m) \Delta t \cdot \tau_1 / \tau_2 = 66 \text{ kJ}/\text{kg}$$

7.2.13. Într-un vas, în care trebuie menținută temperatura constantă (termostat), s-a introdus o masă m de naftalină, din care o fracțiune f este în stare lichidă. Se toarnă în termostat o masă M de apă. Între ce limite poate fi cuprinsă temperatura apei, pentru ca temperatura din termostat să nu se schimbe ?

Aplicație. Temperatura de topire a naftalinei $\theta = 80^\circ\text{C}$, căldura latentă de topire a naftalinei $\lambda = 151 \text{ kJ}/\text{kg}$, $f = 1/2$, $m = 1,00 \text{ kg}$, $M = 2,00 \text{ kg}$.

Rezolvare. În cazul temperaturii *minime* a apei, va îngheța naftalina lichidă pentru a aduce temperatura apei la $\theta = 80^\circ\text{C}$:

$$f m \lambda = Mc(\theta - t_1), \quad t_1 = \theta - f m \lambda / (Mc) = 71^\circ\text{C} . \quad (1)$$

În cazul temperaturii *maxime*, se va topi naftalina solidă pentru a răci apa la $\theta = 80^\circ\text{C}$:

$$(1 - f)m \lambda = Mc(t_2 - \theta), \quad t_2 = \theta + (1 - f)m \lambda / (Mc) = 89^\circ\text{C} . \quad (2)$$

Prin urmare, pentru oricare temperatură inițială a apei $\in (71, 89)^\circ\text{C}$, termostatul va asigura temperatura $\theta = 80^\circ\text{C}$.

7.2.14. Un vas calorimetric de capacitate calorică $C = 200 \text{ J}/\text{K}$ conține o masă m_a de apă la temperatura $t_a = 20^\circ\text{C}$. Se introduce apoi o masă $m_g = 1,00 \text{ kg}$ gheață la temperatura $t_g =$

= - 10°C și o masă $m_c = 100$ g de cupru la temperatura $t_c = 100^\circ\text{C}$. Știind că temperatura finală de echilibru este 0°C , aflați masa inițială m_a de apă .

Rezolvare. Întrucât gheața și apa pot coexista în echilibru termic la 0°C în orice proporție, rezultă că masa de apă m_a poate lua orice valoare într-un anumit interval și anume între m_{\min} când nu se topește gheața deloc și m_{\max} când toată gheața se va topi .

$$Q_{\text{ced}} = m_c c_c t_c + (m_{\min} c_a + C) t_a = Q_{\text{prim}} = m_g c_g (-t_g) , \quad (1)$$

$$m_{\min} = [m_g c_g (-t_g) - m_c c_c t_c - C t_a] : (c_a t_a) = 155 \text{ g} . \quad (2)$$

În celălalt caz :

$$Q'_{\text{ced}} = m_c c_c t_c + (m_{\max} c_a + C) t_a = Q'_{\text{prim}} = m_g c_g (-t_g) + m_g \lambda_g , \quad (3)$$

$$m_{\max} = [m_g c_g (-t_g) + m_g \lambda_g - m_c c_c t_c - C t_a] : (c_a t_a) =$$

$$= m_{\min} + m_g \cdot \lambda_g / (c_a t_a) = 4,01 \text{ kg} . \quad (4)$$

7.2.15. Într-un congelator s-a introdus o cantitate de apă la temperatura $t_1 = 8,0^\circ\text{C}$ și s-a observat că după $\tau_1 = 4,0$ min temperatura apei a scăzut la $t_2 = 4,0^\circ\text{C}$. Evaluezi cât timp trebuie să mai treacă pentru ca toată apa să înghețe .

Rezolvare. Considerăm că viteza de evacuare a căldurii din camera congelatorului este practic constantă , deci

$$\Phi = mc(t_1 - t_2) / \tau_1 = (mct_2 + m \lambda) / \tau_2 \rightarrow$$

$$\tau_2 = \tau_1 \cdot (ct_2 + \lambda) / [c(t_1 - t_2)] = 1 \text{ h } 24 \text{ min} .$$

*

7.3. Vaporizarea și condensarea

7.3.1. Într-un cilindru de înălțime $h = 50$ cm fierbe apa la presiunea atmosferică normală. Care este temperatura apei la fundul cilindrului ?

Rezolvare. Conform *legii a doua* a fierberii, lichidul fierbe la acea temperatură la care presiunea vaporilor săi saturați devine egală cu presiunea exterioară. Fierberea înseamnă vaporizare care are loc în întregul volum al lichidului prin formarea de bule în interiorul cărora sunt vaporii saturați ai lichidului. Presiunea acestor vapori saturați în interiorul bulei trebuie să fie egală cu presiunea exterioară, și anume : presiunea atmosferică H plus presiunea hidrostatică a coloanei de lichid de deasupra bulei, altfel bula nu se poate forma sau urcă imediat și se sparge. Prin urmare,

$$p_s = H + \rho gh = 101,3 \text{ kPa} + 5,0 \text{ kPa} = 106,3 \text{ kPa} , \quad (1)$$

la această presiune corespunde o temperatură (după *Tabele*) :
 $t_f \cong 101^\circ\text{C}$.

7.3.2. Într-un calorimetru cu apă la temperatura $t_a = 20^\circ\text{C}$ se aruncă un manșon de fier de aceeași masă cu apa. În starea finală de echilibru nivelul apei a revenit la nivelul inițial. Aflați temperatura inițială a fierului. Se neglijează dilatările termice.

Rezolvare. Temperatura fierului trebuie să fie mai mare decât temperatura de fierbere a apei, pentru ca prin fierbere să se vaporizeze un volum de apă egal cu volumul fierului (atunci nivelul apei poate reveni la nivelul inițial):

$$Q_{\text{ced}} = mc_{\text{Fe}}(t_{\text{Fe}} - t_f) = Q_{\text{pnm}} = mc_a(t_f - t_a) + \rho_a(m / \rho_{\text{Fe}}) \lambda , \quad (1)$$

$$t_{\text{Fe}} = t_f + (c_a / c_{\text{Fe}}) (t_f - t_a) + (\rho_a / \rho_{\text{Fe}}) (\lambda / c_{\text{Fe}}) = 886^\circ\text{C} . \quad (2)$$

7.3.3. Într-un vas calorimetric de alamă de masă $m_c = 200$ g se află un volum $V_a = 1,00$ L apă și o masă $m_g = 400$ g de gheață în echilibru termic. În apa din vas se introduc $m_v = 100$ g vapori de apă la temperatura de fierbere $t = 100^\circ\text{C}$. Care va fi temperatura finală de echilibru ?

Rezolvare. Facem în prealabil un *bilanț* al căldurilor :
Căldura necesară gheții pentru topire :

$$Q_{\text{nec}} = m_g \lambda_g = 134 \text{ kJ} . \quad (1)$$

Căldura disponibilă pe care o pot da vaporii prin condensare și răcire până la 0°C : $Q_{\text{disp}} = m_v \lambda_v + m_v c_a t = 267,5 \text{ kJ} . \quad (2)$

Prin urmare, se va topi toată gheața și temperatura finală va fi $\theta > 0$. Acum *ecuația calorimetrică* ne dă :

$$m_v \lambda_v + m_v c_a (t - \theta) = m_g \lambda_g + [(m_a + m_g) c_a + m_c c_c] \theta , \quad (3)$$

$$\theta = [m_v (\lambda_v + c_a t) - m_g \lambda_g] : [m_c c_c + (m_a + m_g + m_v) c_a] = 21^\circ\text{C} . \quad (4)$$

7.3.4. Într-un calorimetru se află în echilibru termic mase egale de apă și gheață. Se trece prin amestec o masă egală de vapori de apă la temperatura de fierbere $t_f = 100^\circ\text{C}$. Aflați temperatura finală de echilibru termic .

Rezolvare. Facem în prealabil un *bilanț* al căldurilor :

Căldura necesară amestecului de apă și gheață pentru a ajunge la fierbere (t_f) :

$$Q_{\text{nec}} = m \lambda_g + 2mct_f = 1171 m , \text{ kJ} . \quad (1)$$

Căldura disponibilă, cedată de vapori prin condensare :

$$Q_{\text{disp}} = m \lambda_v = 2257 m , \text{ kJ} . \quad (2)$$

Prin urmare, temperatura finală va fi $\theta = t_f = 100^\circ\text{C}$ și se va condensa numai o parte din vapori : $m_v' = Q_{\text{nec}} / \lambda_v = 0,52 m . \quad (3)$

7.3.5. O piesă de oțel de masă $m = 2,00 \text{ kg}$ este scoasă dintr-un cuptor cu temperatura $t = 1000^\circ\text{C}$ și aruncată (pentru călire) într-un vas de capacitate calorică $C = 220 \text{ J/K}$ conținând $m_a = 1,00 \text{ kg}$ apă la temperatura $t_a = 20^\circ\text{C}$. Care va fi temperatura finală a apei ?

Rezolvare. Deoarece este posibilă atingerea temperaturii de fierbere, care nu poate fi depășită (la presiunea atmosferică dată), să evaluăm căldura necesară apei și vasului ca să ajungă la temperatura de fierbere și căldura disponibilă de la piesa de oțel ca să se răcească până la t_f :

$$Q_{\text{nec}} = (m_a c_a + C)(t_f - t_a) = 352 \text{ kJ} , \quad (1)$$

$$Q_{\text{disp}} = mc(t - t_f) = 1152 \text{ kJ} , \quad (c = 640 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})) , \quad (2)$$

rezultă imediat că se atinge temperatura de fierbere. Apa încetează să fiarbă după vaporizarea masei :

$$m_v = (Q_{\text{disp}} - Q_{\text{nec}}) / \lambda = 0,35 \text{ kg} . \quad (3)$$

După aceasta temperatura amestecului din calorimetru va coborî lent (după calitatea izolării termice a vasului calorimetric).

7.3.6. Într-un vas calorimetric de alamă, de masă $m_c = 200$ g, conținând $m_a = 1,00$ kg apă în echilibru termic cu $m_g = 0,50$ kg gheață, se toarnă $m_{Sn} = 10,0$ kg cositor topit la temperatura $t_{Sn} = 252^\circ\text{C}$. Calculați masa de apă ce se va vaporiza atunci când se atinge starea finală de echilibru termic.

Rezolvare. Facem un bilanț al căldurilor. Căldura necesară gheții, apei și vasului ca să ajungă la temperatura de fierbere a apei:

$$Q_{nec} = m_g \lambda_g + (m_a + m_g) c_a t_f + m_c c_c t_f = 868,5 \text{ kJ} . \quad (1)$$

Căldura disponibilă, cedată de cositor prin răcire și solidificare, până la $t_f = 100^\circ\text{C}$:

$$Q_{disp} = m_{Sn} c_{Sn \text{ lich.}} (t - t_f) + m_{Sn} \lambda_{Sn} + m_{Sn} c_{Sn} (t_f - t) = 940,6 \text{ kJ} . \quad (2)$$

Prin urmare, apa ajunge la fierbere. Până la încetarea fierberii se vaporizează :

$$m_v = (Q_{disp} - Q_{nec}) / \lambda_v = 32 \text{ g} . \quad (3)$$

7.3.7. Într-un vas, cu echivalentul în apă $A = 110$ g, conținând $m_a = 3,00$ kg apă la temperatura $t_a = 17^\circ\text{C}$, se aruncă o bucată de oțel de masă $m = 3,00$ kg încălzită la temperatura $t = 550^\circ\text{C}$. Temperatura finală a apei a devenit $\theta = 50^\circ\text{C}$. Ce masă de apă m_v s-a vaporizat prin contactul cu corpul fierbinte ?

Rezolvare. Ecuația calorimetrică se scrie : $Q_{ced} = mc(t - \theta) =$

$$= Q_{prim} = (m_a + A)c_a(\theta - t_a) + m_v c_a(t_f - \theta) + m_v \lambda_v , \quad (1)$$

$$m_v = [mc(t - \theta) - (m_a + A)c_a(\theta - t_a)] : [c_a(t_f - \theta) + \lambda_v] = 0,10 \text{ kg} . \quad (2)$$

7.3.8. Una din metodele de răcire este și metoda evaporării forțate sau intensive. Vasul cu lichidul se așază sub un clopot de sticlă din care se evacuează aerul și vaporii (mașina pneumatică). Calculați fracțiunea din masa inițială de apă, luată la 0°C , care poate fi înghețată prin acest procedeu .

Rezolvare. Căldura necesară evaporării, $m_v \lambda_v$ (λ_v trebuie luat la 0°C), se obține prin înghețarea restului apei, $m_g \lambda_g$, deci

$$m_g \lambda_g = (m - m_g) \lambda_v , \quad m_g / m = \lambda_v / (\lambda_g + \lambda_v) = 88 \% .$$

7.3.9. După timpul $\tau_1 = 40$ min de la începutul fierberii supei gospodina a completat oala, cu apă rece, până la nivelul inițial și a observat că după alte $\tau_2 = 6,0$ min apa a început să fiarbă din nou. Care a fost temperatura t_r a apei adăugate ?

Rezolvare. Considerăm că afluxul de căldură de la plită spre vas este practic *constant* (nu se umblă la robinetul plitei, nu se schimbă practic temperatura în cameră, etc.), atunci notând cu m_v masa de apă vaporizată :

$$\Phi = m_v \lambda_v / \tau_1 = m_v c (t_f - t_r) / \tau_2 ,$$

$$t_r = t_f - (\lambda_v / c) \cdot \tau_2 / \tau_1 = 19^\circ\text{C} .$$

7.3.10. Într-un vas metalic, într-un anumit interval de timp, se topesc $m_g = 40$ g gheață la 0°C , temperatura mediului ambiant fiind $t_m = 20^\circ\text{C}$. Introducând (în locul gheții) azot lichid, aflați ce masă de azot se va vaporiza în același interval de timp.

Rezolvare. Conform *legii lui Newton*, căldura schimbată pe unitatea de timp între un solid și mediul ambiant fluid este proporțională cu diferența de temperatură dintre corp și fluid. Prin urmare, afluxul de căldură dinspre cameră spre vas este proporțional cu diferența de temperatură, deci putem scrie :

$$Q_g = m_g \lambda_g = k t_m \tau , \quad Q_N = m_N \lambda_N = k (t_m - t_N) \tau . \quad (1)$$

Prin împărțirea ecuațiilor membru la membru, obținem

$$m_N \lambda_N / m_g \lambda_g = (t_m - t_N) / t_m ,$$

$$m_N = m_g (\lambda_g / \lambda_N) (t_m - t_N) / t_m = 725 \text{ g} . \quad (2)$$

7.3.11. Într-un cilindru cu secțiunea $S = 1,00$ dm², sub un piston de masă neglijabilă, se află o masă $m = 10,0$ g apă în condiții normale. a) Care este volumul molar al apei (lichide) în condiții normale ? b) La ce înălțime se ridică pistonul dacă transmitem apei o căldură $Q = 10,0$ kJ ?

Rezolvare. a) $V_{\mu 0} = \mu / \rho_0 = 18 \text{ cm}^3/\text{mol} = 0,018 \text{ L/mol} = 18 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{mol}$. Atragem atenția că volumul molar (adică volumul unui *mol* de substanță) al **solidelor** și **lichidelor** diferă de la substanță la substanță, fiind egal cu masa *molară* (adică masa unui mol) împărțită la *densitatea* substanței, în condițiile respective de presiune și temperatură. Spre deosebire de solide și lichide, la **gazele ideale** volumul molar în *aceleași* condiții de temperatură și presiune este *aceleași*, independent de natura gazului. Dacă aceste condiții sunt cele *normale*, atunci volumul molar al gazelor, în C.N., este o constantă a fizicii : $V_{\mu 0} = 22,41 \text{ NL/mol}$ (NL - normal-litru).

În problemă s-a cerut volumul molar al **apei lichide** .

b) Căldura necesară apei ca să ajungă la fierbere :

$$Q_{\text{nec}} = m c t_f = 4,18 \text{ kJ} < Q = 10,0 \text{ kJ} , \quad (1)$$

deci o parte din apă se va vaporiza. Prezența pistonului face ca o parte din căldură (energia cinetică a mișcării haotice a moleculelor)

să se consume în lucrul mecanic de destindere (mișcare ordonată a moleculelor) împotriva forței de presiune exterioare (restul căldurii transmise merge pentru ruperea legăturilor dintre molecule).

Volumul specific (volumul unității de masă, adică *inversul* densității) al vaporilor de apă la presiunea normală și temperatura $t_f = 100^\circ\text{C}$ este $v = RT_f / (\mu p_o) = 1,7 \text{ m}^3/\text{kg}$, (2)

ceea ce puteam calcula și cu ajutorul densității vaporilor *saturați* $\rho_s(t_f) = 0,60 \text{ kg/m}^3$; $v = 1 / \rho_s = 1,67 \text{ m}^3/\text{kg}$. (3)

Lucrul mecanic efectuat la formarea vaporilor, împotriva forței de presiune atmosferică, pe unitatea de masă:

$$L^* = p\Delta V / m = 168 \text{ kJ/kg}. \quad (4)$$

Pe de altă parte, căldura latentă de vaporizare: $\Lambda_V = 2257 \text{ kJ/kg}$. Într-o primă aproximație lucrul mecanic (4) se poate neglija.

$$Q = mct_f + m_v \lambda_v + p_o m_v v, \quad (5)$$

$$m_v = (Q - mct_f) / (\lambda_v + p_o v) = 2,4 \text{ g}, \quad (6)$$

$$h = m_v / (\rho_s S) = 40,3 \text{ cm}. \quad (7)$$

7.3.12. Aflați viteza cu care ies aburii prin ciocul ceainicului de arie $S = 1,0 \text{ cm}^2$ în care fierbe apa la presiunea atmosferică normală, încălzită cu un reșou de putere $P = 2,0 \text{ kW}$ cu randamentul $\eta = 50\%$.

Rezolvare. Frațiunea $\eta = 0,50$ din puterea încălzitorului este preluată de apă pentru vaporizarea masei în unitatea de timp:

$$\Delta m_v / \Delta t = \rho_s S v, \quad \text{deci}$$

$$\eta P = (\Delta m_v / \Delta t) \lambda_v = \rho_s S v \lambda_v, \quad \rho_s = \mu p_s / (RT_f), \quad (1)$$

unde densitatea vaporilor saturați se poate calcula (știind $p_s = p_o = 101,3 \text{ kPa}$) sau se poate lua din *Tabele* (v. *Anexe*).

$$v = \eta P RT_f / (\mu p_s S \lambda_v) = 7,6 \text{ m/s}. \quad (2)$$

7.3.13. Calculați căldura necesară formării unei bule de vapori de apă de rază $r = 1,0 \text{ mm}$ la adâncimea $h = 1,00 \text{ m}$, presiunea atmosferică fiind normală.

Rezolvare. Saltul de presiune la traversarea stratului superficial al bulei (*Laplace*) este neglijabil: $2\sigma / r \approx 120 \text{ Pa} \ll p_o = 101,3 \text{ kPa}$. De asemenea, schimbarea presiunii vaporilor *saturați* deasupra stratului superficial *curbat* (*Kelvin*) este neglijabilă:

$$[\rho_s / (\rho_\ell - \rho_s)] \cdot 2\sigma / r \approx (\rho_s / \rho_\ell) \cdot 2\sigma / r \approx 0,07 \text{ Pa} \quad (\rho_s = 0,60 \text{ kg/m}^3).$$

Neglijând aceste diferențe de presiune, putem spune că presiunea vaporilor saturați din bulă, conform *legii II a fierberii*, egalează

presiunea atmosferică plus presiunea hidrostatică a stratului de apă de deasupra :

$$p_s = H + \rho gh = 101,3 \text{ kPa} + 9,8 \text{ kPa} = 111,1 \text{ kPa}. \quad (1)$$

La această presiune corespunde temperatura $t_f = 102,6^\circ\text{C}$.

Masa vaporilor saturați din bulă :

$$m_s = \rho_s V = [\mu p_s / (RT_f)] \cdot 4\pi r^3 / 3 = 2,6 \mu\text{g}. \quad (2)$$

Căldura necesară se compune din căldura latentă de vaporizare plus lucrul mecanic de expansiune a vaporilor saturați împotriva presiunii exterioare $H + \rho gh = p_s$ și din energia necesară formării stratului superficial :

$$Q = m_s \lambda_v + p_s V + \sigma S = 5,87 \text{ mJ} + 0,46 \text{ mJ} + 0,74 \mu\text{J}. \quad (3)$$

Se vede rolul celor trei contribuții la formarea bulei de vapor.

7.3.14. Într-un vas se toarnă un strat de tetraclorură de carbon CCl_4 peste care un strat de apă. La presiunea atmosferică normală CCl_4 fierbe la $76,7^\circ\text{C}$. La ce temperatură începe fierberea la interfața dintre cele două lichide ? Folosiți Tabelul vaporilor saturați :

$t, ^\circ\text{C}$	20	30	40	50	60	70	80
CCl_4, kPa	10,66	17,33	26,66	42,66	61,33	81,99	109,32
$\text{H}_2\text{O}, \text{kPa}$	2,40	4,27	7,33	12,40	20,00	31,20	47,33

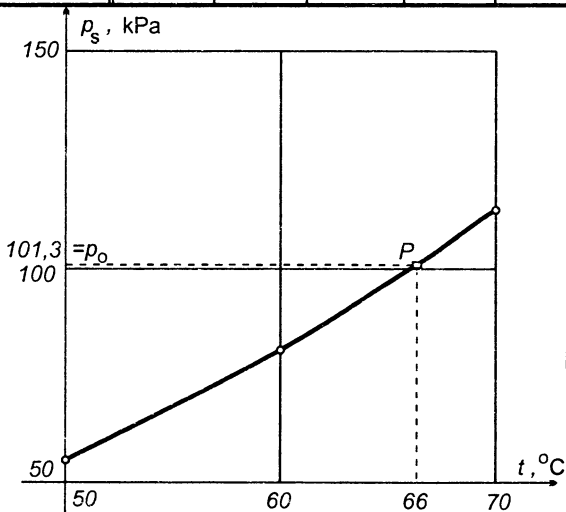


Fig.7.3.14

Rezolvare. La interfața lichidelor se formează bule cu vapori saturați ai *ambelor* lichide, fiecare cu presiunea sa parțială de vapori saturați. De aceea formăm Tabelul presiunii amestecului de vapori saturați la diferite temperaturi :

$t, ^\circ\text{C}$	50	60	70	80
$\text{CCl}_4 + \text{H}_2\text{O}, \text{kPa}$	55,06	81,33	113,19	156,65

Am reprezentat grafic acest tabel. Se vede din grafic că presiunea atmosferică (101,3 kPa) a vaporilor saturați din bulele formate la *interfața* lichidelor se obține la temperatura $\approx 66^\circ\text{C}$, la care deci va începe fierberea la interfața lichidelor.

**** 7.3.15. O masă m_a de apă aflată la temperatura inițială $t_0 = 20^\circ\text{C}$ este răcită prin evaporarea a $m_0 = 0,10 \text{ kg}$ eter aflat la aceeași temperatură inițială. Aflați : a) Cum variază masa m a eterului în funcție de temperatura comună T a apei și eterului. b) Ce masă maximă de apă poate fi înghețată prin evaporarea totală a eterului .**

Rezolvare. a) Pentru evaporarea unei cantități *infinitesimale* $|dm| = -dm$ de eter este nevoie de căldură latentă de vaporizare , $-dm \Lambda$, care este furnizată prin răcirea apei și eterului cu $|dT| = -dT$, astfel încât avem *bilanțul* căldurilor pentru acest proces elementar de vaporizare :

$$-dm \Lambda = -(m_a c_a + mc) dT . \quad (1)$$

Separăm variabilele și integrăm : $\int \frac{dm}{m_a c_a + mc} = \int \frac{dT}{\Lambda}$,

$$(1/c) \ln(m_a c_a + mc) = T/\Lambda + C , \quad (2)$$

unde constanta de integrare C se determină din *condiția inițială* ca la $t = t_0$ să avem masa eterului $m = m_0$, deci

$$(1/c) \ln(m_a c_a + m_0 c) = T_0/\Lambda + C ,$$

astfel încât $(1/c) \ln [(m_a c_a + mc)/(m_a c_a + m_0 c)] = (t - t_0)/\Lambda$, (3)

de unde $m = (m_0 + m_a c_a / c) e^{-(t_0 - t)c/\Lambda} - m_a c_a / c$, $0 < t \leq t_0$ (4)
(până în momentul înghețării) .

Se poate integra și *definit* (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_{m_0}^m \frac{dm}{m_a c_a + mc} = \int_{t_0}^t \frac{dT}{\Lambda} , \text{ adică}$$

$$(1/c) \ln [(m_a c_a + mc)/(m_a c_a + m_0 c)] = (t - t_0)/\Lambda ,$$

Dacă $(t_0 - t)c / \Lambda \ll 1$, exponențiala se poate aproxima :

$$e^x \cong 1 + x, \text{ dacă } |x| \ll 1 ; \quad (5)$$

$$m = m_0 - (1 / \Lambda) (m_a c_a + m_0 c) (t_0 - t) . \quad (6)$$

b) Aflăm din formula de mai sus masa de eter rămasă în momentul când se atinge $t = 0^\circ\text{C}$:

$$m_r = (m_0 + m_a c_a / c) e^{-t_0 c / \Lambda} - m_a c_a / c , \quad (7)$$

Prin evaporarea acestei mase de eter trebuie să înghețăm toată apa m_a , deci $m_a \lambda = m_r \Lambda$,

$$m_a = m_0 e^{-t_0 c / \Lambda} : [\lambda / \Lambda + (1 - e^{-t_0 c / \Lambda}) c_a / c] . \quad (8)$$

Dacă $t_0 c / \Lambda \ll 1$, putem aproxima exponențiala și obținem :

$$m_a = m_0 (\Lambda - t_0 c) : (\lambda + t_0 c_a) . \quad (9)$$

În cazul problemei $t_0 c / \Lambda = 0,09$ și avem aproximativ cu formula de mai sus $m_a = 86$ g, în timp ce calculul cu formula exactă dă $m_a = 88$ g .

*

7.4. Căldura și energia mecanică

7.4.1. Pe platforma orizontală a unui cărucior de masă m_2 se află un corp prismatic de masă m_1 . Între cărucior și teren (șine) frecarea este neglijabilă. În corpul m_1 nimereste un glonț de masă m , care se mișcă orizontal cu viteza v_0 . Aflați cantitatea totală de căldură degajată prin frecare dintre corpul m_1 și platformă.

Aplicație. $m_2 = 4,00$ kg , $m_1 = 990$ g , $m = 10,0$ g , $v_0 = 500$ m/s .

Rezolvare. Legea de *conservare a impulsului* la ciocnirea plastică (total inelastică) (m , m_1) dă : $mv_0 = (m + m_1)v$. (1)

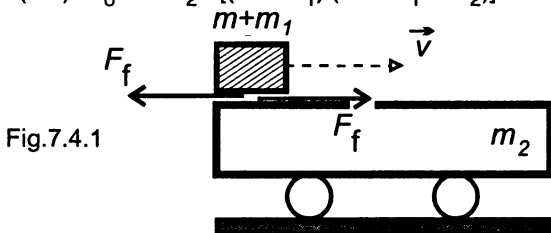
Cu această viteză, corpul format ($m + m_1$) ciocnește căruciorul :

$$(m + m_1)v = (m + m_1 + m_2) v' , \quad (2)$$

unde v' este viteza finală comună a celor trei corpuri .

Avem o pierdere de energie cinetică la prima ciocnire și o pierdere de energie cinetică la a doua ciocnire. Căldura cerută este pierderea de energie cinetică în a doua ciocnire plastică care durează atâta timp cât $(m + m_1)$ alunecă pe m_2 :

$$Q = (1/2) (m + m_1)v^2 - (1/2) (m + m_1 + m_2)v'^2 = \\ = (1/2)mv_0^2 \cdot mm_2 : [(m + m_1) (m + m_1 + m_2)] = 10,0J . \quad (3)$$



Se putea folosi direct formula pierderii de energie cinetică în ciocnirea plastică a corpului $(m + m_1)$ cu m_2 :

$$Q = (1/2)m_r v_r^2 = (1/2) [(m + m_1) m_2 : (m + m_1 + m_2)] \cdot v^2 . \quad (4)$$

Putem rezolva problema pe o altă cale, folosind ecuațiile mișcării. Între corpurile $(m + m_1)$ și m_2 acționează forțele de frecare la alunecare :

$$F_f = \mu N = \mu(m + m_1)g . \quad (5)$$

Corpul $(m + m_1)$ este frânat de această forță cu accelerația $-\mu g$, iar platforma este accelerată de aceeași forță, dar cu accelerația $\mu(m + m_1)g / m_2$. Lunecarea corpului pe platformă încetează, când vitezele corpurilor se egalează :

$$v - \mu g t = v' = \mu(m + m_1)g t / m_2 , \quad (6)$$

$$t_m = m_2 v : [\mu g (m + m_1 + m_2)] . \quad (7)$$

Distanțele parcurse de corpuri până la încetarea alunecării :

$$x_1 = v t_m - (1/2) \mu g t_m^2 , \quad x_2 = (1/2) \mu g (m + m_1) t_m^2 / m_2 . \quad (8)$$

Distanța pe care alunecă corpul pe platformă :

$$s = x_1 - x_2 = m_2 v^2 : [2\mu g (m + m_1 + m_2)] . \quad (9)$$

Teorema variației energiei cinetice pentru corpul $(m + m_1)$ dă :

$$L_1 = -F_f x_1 = \Delta E_{c1} \text{ sau } -\mu(m + m_1)g x_1 = (1/2)(m + m_1)(v'^2 - v^2) . \quad (10)$$

Prin intermediul lucrului mecanic L_1 al forței de frecare, corpul $(m + m_1)$ transmite energie (o parte din energia sa cinetică) platformei m_2 .

Aceeași teoremă aplicată platformei m_2 dă :

$$L_2 = F_f x_2 = \Delta E_{c2} \text{ sau } \mu(m + m_1)gx_2 = (1/2) m^2 v'^2. \quad (11)$$

Prin intermediul lucrului mecanic L_2 al forței de frecare, corpul m_2 capătă energie cinetică. Cele două lucruri mecanice nu sunt egale. Lucrul mecanic total asupra sistemului al forțelor de frecare *neconservative* este egal cu variația energiei *mecanice* :

$$\begin{aligned} 0 > L_1 + L_2 &= -\mu(m + m_1)g(x_1 - x_2) = -\mu(m + m_1)gs = \\ &= - (1/2) [(m + m_1) m_2 : (m + m_1 + m_2)] \cdot v^2 = \\ &= \Delta E_c = \Delta E_{c1} + \Delta E_{c2} < 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Energia mecanică (cinetică) a sistemului scade , $\Delta E_c < 0$, transformându-se parțial în căldură prin intermediul lucrului mecanic al forțelor de frecare *neconservative* .

7.4.2. Un remorcher mergând singur cu viteza $v = 7,2$ km/h consumă $M_1^* = 50$ kg/h cărbune .Trăgând șlepurile cu aceeași viteză consumă $M_2^* = 290$ kg/h cărbune. Randamentul mașinii cu aburi este $\eta = 10$ % . Ce diametru minim trebuie să aibă cablul de remorcare a șlepurilor, dacă tensiunea la rupere a cablului $\sigma_r = 360$ N/mm² ?

Rezolvare. Remorcând șlepurile motorul trebuie să dezvolte o forță de tracțiune suplimentară, egală cu forța de tensiune din cablul de remorcare :

$$F_2 - F_1 = P_2 / v - P_1 / v, \quad (1)$$

dar puterile dezvoltate de motor sunt $P = \eta Q = \eta M^* q$ (2)

(q - puterea calorică a cărbunelui) și tensiunea din cablu, la limită,

$$\sigma_r S = \sigma_r \pi d^2 / 4 = (P_2 - P_1) / v = \eta q (M_2^* - M_1^*), \quad (3)$$

$$d = 2 \sqrt{\frac{\eta q (M_2^* - M_1^*)}{\pi \sigma_r v}} = 19 \text{ mm} . \quad (4)$$

7.4.3. O picătură sferică de apă de rază $R = 2,0$ mm cade în aer cu viteză constantă. Ea întâmpină din partea aerului o forță de rezistență $F_r = 0,24 \pi R^2 \rho_{aer} v^2$. Cu câte grade crește temperatura picăturii în timpul $\tau = 10$ s , dacă o fracțiune $f = 0,60$ din căldura degajată merge pentru încălzirea picăturii ?

Rezolvare. Viteza de cădere fiind constantă :

$$F_r = 0,24 \pi R^2 \rho_{aer} v^2 = G = mg \quad (1)$$

(am neglijat forța arhimedică). Dar căldura degajată este egală cu minus lucrul mecanic al forței de rezistență (forță *neconservativă*) :

$$mc\Delta t = Q = f \cdot F_r s = f F_r v\tau = f mg v\tau, \quad (2)$$

$$\Delta t = \frac{fg\tau}{c} \sqrt{\frac{mg}{0,24\pi R^2 \rho_{aer}}} = \frac{fg\tau}{0,30 \cdot c} \sqrt{\frac{\rho_{apa} Rg}{2\rho_{aer}}} = 0,13 \text{ grad}. \quad (3)$$

7.4.4. Un glonț, având o viteză orizontală $v_0 = 500$ m/s, străpunge o scândură fixă la înălțimea $h = 2,0$ m de la sol și se încălzește în acest timp cu $\Delta t = 200$ K ($c = 130$ J/(kg · K)). Considerând că o fracțiune $f = 0,50$ din căldura degajată o preia glonțul, aflați distanța orizontală la care cade glonțul.

Rezolvare. Căldura degajată este dată de pierderea de energie cinetică $Q = (1/2) m(v_0^2 - v^2)$ din care o fracțiune f o preia glonțul :

$$mc\Delta t = f Q = f \cdot (1/2) m(v_0^2 - v^2). \quad (1)$$

Pe de altă parte bătaia orizontală este :

$$b = vt_c = v \sqrt{2h/g} = \sqrt{2h/g} \cdot \sqrt{v_0^2 - 2c\Delta t / f} = 242 \text{ m}. \quad (2)$$

7.4.5. Două corpuri identice, de masă $m = 1,00$ kg fiecare, aflate la aceeași înălțime $h = 5,00$ m și la distanța $d = 8,00$ m unul de altul, sunt lansate simultan unul spre celălalt cu viteze orizontale egale $v_0 = 10,0$ m/s . Aflați : a) După cât timp și la ce înălțime se întâlnesc corpurile . b) Viteza corpului format prin ciocnirea plastică. c) Variația temperaturii corpurilor în urma ciocnirii plastice. Căldura specifică $c = 1,00$ kJ/(kg · K) .

Rezolvare. a) Condiția de întâlnire :

$$d/2 = v_0 t_c, \quad t_c = d/(2v_0) = 0,40 \text{ s}, \quad (1)$$

$$h' = h - (1/2) g t_c^2 = 4,2 \text{ m}. \quad (2)$$

b) Prin ciocnirea plastică a celor două corpuri identice și aruncate simetric componentele orizontale ale impulsurilor se distrug reciproc, astfel încât rămân componentele verticale :

$$v' = g t_c = 4,0 \text{ m/s}. \quad (3)$$

c) Căldura degajată într-o ciocnire plastică :

$$Q = -\Delta E_c = (1/2) m_r v_r^2 = (1/2) (m/2)(2v_0)^2 = mv_0^2, \quad (4)$$

unde m_r este masa redusă, în cazul nostru $m/2$, și $\vec{v}_r = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ este viteza relativă a unui corp (1) față de celălalt (2), în cazul nostru $2v_0$.

$$2mc\Delta t = Q = mv_0^2, \quad \Delta t = v_0^2/(2c) = 0,050 \text{ K}. \quad (5)$$

7.4.6. Un remorcher trage șleपुरi pe o distanță $d = 100$ km. Cablul de remorcare este întins cu o forță $T = 90$ kN. Singur, fără șleपुरi remorcherul dezvoltă o viteză de $n = 4,0$ ori mai mare, la același consum orar de cărbune. Randamentul mașinii cu

aburi $\eta = 10\%$. **Forța de rezistență a apei este proporțională cu viteza. Aflați cantitatea de cărbune necesară pentru transportarea șlepurilor.**

Rezolvare. Fie q - puterea calorifică a cărbunelui și M^* - consumul de cărbune în unitatea de timp (consumul orar). Atunci puterea dezvoltată de motorul remorcherului: $\eta M^* q$ și forța de tracțiune $\eta M^* q / v$. Această forță egalează forțele de rezistență, mișcarea fiind uniformă. În prezența șlepurilor: $\eta M^* q / v = T + k v$, (1) unde $k v$ este forța de rezistență a apei întâmpinată de remorcher. În absența șlepurilor (considerând aceeași constantă k):

$$\eta M^* q / (n v) = k n v. \quad (2)$$

Din ecuațiile (1) și (2) rezultă: $n = (T + k v) / (k n v)$,

$$v = T / [k (n^2 - 1)], \quad M^* / v = T n^2 / [\eta q (n^2 - 1)]. \quad (3)$$

Cantitatea de cărbune necesară:

$$m = M^* t = M^* d / v = [T d / (\eta q)] n^2 / (n^2 - 1) = 3,2 \text{ t}. \quad (4)$$

7.4.7. Un automobil cu masa $m = 1,00 \text{ t}$ **consumă pe un drum orizontal o cantitate de benzină** $m_b^* = 9,8 \text{ kg}/(100 \text{ km})$. **Cu cât la sută va scădea viteza automobilului, considerând aceleași forțe de rezistență și același consum orar de benzină, pe un drum înclinat cu panta** $p = 7 \text{ m}/(100 \text{ m})$. **Randamentul motorului** $\eta = 28\%$.

Rezolvare. Forța activă de tracțiune F dezvoltată de motor pe drumul orizontal echilibrează forța pasivă de rezistență F_r , mișcarea fiind uniformă ($v = \text{const} \rightarrow a = 0$). Puterea dezvoltată de forța F este egală cu puterea dezvoltată de motor:

$$P = F v_0 = \eta q (m_b^* v_0) \rightarrow F = \eta q m_b^* = F_r, \quad (1)$$

unde q este puterea calorifică a benzinei și $m_b^* v_0$ - consumul de benzină pe unitatea de timp (consumul orar).

Pe drumul înclinat, la forța de rezistență de mai sus se adaugă componenta greutateii $mg \sin \alpha \approx m g p$, de aceea:

$$(F_r + m g p) v = P = \eta q m_b^* v_0 \text{ sau } (\eta q m_b^* + m g p) v = \eta q m_b^* v_0, \quad (2)$$

de unde $v / v_0 = \eta q m_b^* : (\eta q m_b^* + m g p)$,

$$\begin{aligned} (v_0 - v) / v_0 &= 1 - v / v_0 = m g p : (\eta q m_b^* + m g p) = \\ &= 1 : [1 + \eta q m_b^* / (m g p)] = 35\%. \end{aligned} \quad (3)$$

7.4.8. O locomotivă de masă $m = 30 \text{ t}$, **consumând orar** $M^* = 98 \text{ kg}/\text{h}$ **cărbune, cu randamentul motorului** $\eta = 10\%$, **are pe drum orizontal o viteză** $v_0 = 50 \text{ km}/\text{h}$. **Ce viteză constantă** v **va avea locomotiva dacă intră pe un drum înclinat de pantă**

$p = 1 : 100$? Se vor considera trei cazuri : forța de rezistență totală este proporțională : a) cu apăsarea normală pe șine, b) cu viteza locomotivei, c) cu pătratul vitezei , în ultimul caz se vor calcula în primă aproximație limitele între care este cuprinsă viteza v , considerând intersecția a două grafice corespunzătoare (hiperbolă și parabolă) în diagrama $F - v$.

Rezolvare. a) Forța de tracțiune dezvoltată de locomotivă:

$$P / v_0 = \eta M^* q / v_0 = kmg , \quad (1)$$

$$\eta M^* q / v = kmg \cos \alpha + mg \sin \alpha . \quad (2)$$

Prin împărțirea ecuațiilor membru la membru, obținem :

$$v = v_0 : (\cos \alpha + r) , \quad (3)$$

unde $r = (\sin \alpha) / k = (\sin \alpha) mgv_0 : (\eta M^* q) \approx$

$$\approx mgpv_0 : (\eta M^* q) = 0,50 . \quad (4)$$

$$v \approx v_0 : (1 + r) = 33 \text{ km/h} . \quad (5)$$

b) În acest caz, $\eta M^* q / v_0 = kv_0$, respectiv

$$\eta M^* q / v = kv + mg \sin \alpha , \quad (6)$$

de unde $(v / v_0)^2 + r(v / v_0) - 1 = 0$, unde r este (4), (7)

$$v = v_0 \left(\sqrt{1 + r^2 / 4} - r / 2 \right) = 39 \text{ km/h} . \quad (8)$$

c) $\eta M^* q / v_0 = kv_0^2$, $\eta M^* q / v = kv^2 + mg \sin \alpha$, (9)

$$\eta M^* q / v = mg \sin \alpha + (\eta M^* q / v_0^3) v^2$$

sau $v_0 / v = r + v^2 / v_0^2$. (10)

Este o ecuație de gradul trei în v / v_0 pe care o vom rezolva prin metoda aproximațiilor succesive . Soluția se află la intersecția curbelor : $y_1 = v_0 / v$ (hiperbolă), $y_2 = r + v^2 / v_0^2$ (parabolă). (11)

Reprezentăm grafic aceste curbe. Pentru $v / v_0 = 1$ ordonatele sunt respectiv, $y_1 = 1$, $y_2 = r + 1$, deci din grafic se vede că soluția $v_r < v_0$, ceea ce era de așteptat. Vom merge conform săgeților din figură. Pentru marginea inferioară v_1 avem condiția

$$y_2 = 1 = r + v_1^2 / v_0^2 \rightarrow v_1 = v_0 \sqrt{1 - r} = 35,4 \text{ km/h} . \quad (2)$$

O margine superioară v_2 mai bună, în aproximația întâia, va fi dată de condiția

$$y_1(v_1) = y_2(v_2), \text{ adică } v_0 / v_1 = r + v_2^2 / v_0^2 ,$$

$$v_2 = v_0 \sqrt{1 / \sqrt{1 - r} - r} = 47,7 \text{ km/h} . \quad (13)$$

Viteza căutată v_r este cuprinsă între v_1 și v_2 . Putem continua mai departe pentru a obține marginile lui v_r în aproximația a doua.

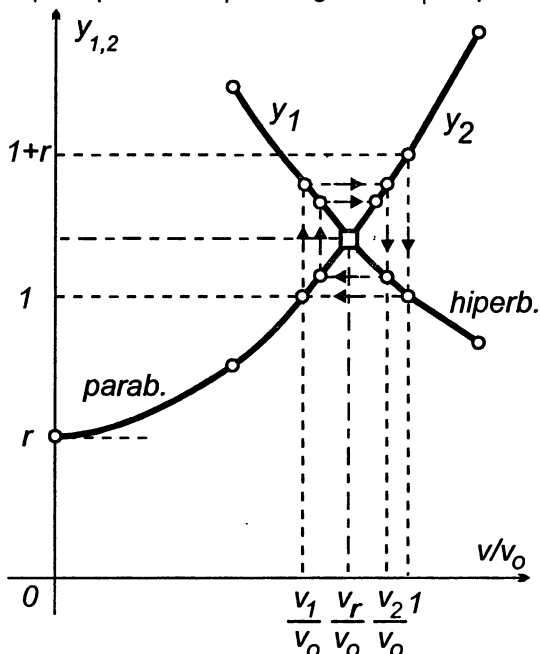


Fig.7.4.8

Cine cunoaște *formulele lui Cardano* poate rezolva ecuația (10) astfel : $x^3 + rx - 1 = 0$, $x = v/v_0$. (14)

Discriminantul $D = (r/3)^3 + (1/2)^2 = 0,25463 > 0$, (15)
deci avem o singură soluție reală. Calculăm mărimile ajutătoare:

$$a = \sqrt[3]{1/2 + \sqrt{D}} = 1,001534 ; b = \sqrt[3]{1/2 - \sqrt{D}} = -0,166411 ; \quad (16)$$

$$v_r = v_0(a + b) = 41,7 \text{ km/h} . \quad (17)$$

7.4.9. Un corp de dimensiuni relativ mici, care se mișcă într-un fluid cu viteze relativ mici, când regimul de curgere este laminar (în straturi paralele, fără formarea de vârtejuri), întâmpină din partea fluidului o forță de frecare proporțională cu viteza (legea lui Stokes). În cazul unor corpuri sferice această forță de frecare este dată de formula lui Stokes :

$$F = 6\pi\eta Rv , \quad (1)$$

unde η este *vâscozitatea fluidului; pentru aer*

$$\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(m} \cdot \text{s)} . \quad (2)$$

Într-o zi s-a constatat că ceața cade uniform cu viteza $v = 0,98$ cm/s. Calculați : a) Raza picăturilor care compun ceața . b) Înălțimea de la care trebuie să cadă ceața pentru ca fiecare picătură să se încălzească cu $\Delta t = 0,10$ grad, considerând că o fracțiune $f = 0,85$ din căldura dezvoltată o preiau picăturile .

Rezolvare. a) Căderea uniformă, cu viteza limită de cădere liberă, se obține când forța de frecare (1) echilibrează greutatea aparentă a picăturii :

$$F = 6\pi\eta Rv_0 = mg(1 - \rho_{\text{aer}}/\rho_{\text{apa}}) = (4\pi/3)R^3g(\rho_{\text{apa}} - \rho_{\text{aer}}) , \quad (3)$$

$$R = 3 \cdot \sqrt{\frac{\eta v_0}{2g(\rho_{\text{apa}} - \rho_{\text{aer}})}} = 9,0 \mu\text{m} . \quad (\rho_{\text{aer}} = 1,29 \text{ kg/m}^3) . \quad (4)$$

b) Lucrul mecanic al forței de frecare (neconservative) duce la variația energiei mecanice (cinetice și potențiale) :

$$- F \cdot h = \Delta E = - mgh < 0 . \quad (5)$$

Energia mecanică (în cazul nostru cea potențială) scade transformându-se prin intermediul lucrului mecanic al forței de frecare în căldură :

$$\begin{aligned} Q &= mgh , \quad f Q = f mgh = mc\Delta t , \\ h &= c\Delta t / (f g) = 50 \text{ m} . \end{aligned} \quad (6)$$

7.4.10. Pericolul unui război nuclear constă și în așa numita "iarnă nucleară". Dacă în urma incendiilor se formează în straturile superioare ale atmosferei un strat subțire de funingine, care absoarbe și reemite practic toată radiația solară, afară de cea infraroșie (la temperatura obișnuită), atunci ce temperatură medie de echilibru a Pământului se va stabili, știind că radiația emisă de un corp la echilibru termic este proporțională cu T^4 (legea Stephan - Boltzmann) ?

Rezolvare. Fie q_0 fluxul de energie radiantă incident pe Pământ de la Soare. La echilibru Pământul absoarbe și reemite acest flux proporțional cu T^4 ($T \sim 290$ K). Dacă se formează stratul de funingine, acesta având două suprafețe care îl delimitează, absoarbe fluxul q_0 și emite $q_0/2$ înapoi în cosmos și $q_0/2$ spre Pământ, care primește astfel un flux $q_0/2 \sim T'^4$. Rezultă atunci

$$T'^4 / T^4 = (q_0/2) : q_0 , \quad T' = T / \sqrt[4]{2} = 244 \text{ K} = - 29^\circ\text{C} .$$

(*) 7.4.11. Într-un cilindru sub un piston de masă $M = 10$ kg este vaporizat un lichid. La puterea încălzitorului $P_1 = 100$ W , pistonul urcă cu viteza $v_1 = 5,0$ cm/s, iar la puterea $P_2 = 2P_1$,

urcă cu viteza $v_2 = 2,5 v_1$. Aflați căldura latentă de vaporizare λ , cunoscând temperatura de vaporizare $T = 370 \text{ K}$ și masa molară a lichidului $\mu = 18 \text{ g/mol}$. Presiunea deasupra pistonului este neglijabilă.

Rezolvare. Bilanțul energiilor pentru vaporizarea unei cantități infimezimale dm de lichid în timpul infinit mic dt este :

$$P dt = dm \lambda + q^* dt , \quad (1)$$

unde q^* sunt pierderile de căldură pe unitatea de timp. Vaporizarea se face sub presiunea constantă $p = Mg / S$, deci și $T = \text{const}$ (v. izotermele lui **Andrews**). Ecuația de stare dă prin diferențiere :

$$m = \mu p V / (RT) , \quad dm = [\mu p / (RT)] dV = [\mu p / (RT)] S dx = [\mu p / (RT)] S v dt = [\mu Mg / (RT)] v dt \quad (2)$$

care introdus în ecuația bilanțului energiilor (1) dă:

$$P = \lambda [\mu Mg / (RT)] v + q^* . \quad (3)$$

Scriind această ecuație în cele două cazuri :

$$P_{1,2} = \lambda [\mu Mg / (RT)] v_{1,2} + q^* , \quad (4)$$

obținem , făcând diferența ecuațiilor:

$$\lambda = RT(P_2 - P_1) : [\mu Mg(v_2 - v_1)] = 2,3 \text{ MJ/kg} . \quad (5)$$

Problema se poate rezolva, judecând elementar, fără diferențiale, ci cu variații foarte mici, care descresc către zero, Δt , Δm , ΔV , etc.

* * *

8. PROBLEME RECAPITULATIVE

8.1. O sferă de cupru cu raza $R = 10 \text{ cm}$ este o dată așezată pe un plan orizontal și apoi suspendată de un fir scurt. Neglijând pierderile de căldură spre exterior, aflați căldura specifică în procesul de încălzire a sferei în cele două cazuri.

Rezolvare. Căldura specifică a unei substanțe este căldura necesară unității de masă de a-și mări temperatura cu o unitate (1 grad) în anumite condiții specificate :

$$\bar{c} = \frac{1}{m} \left(\frac{\Delta Q}{\Delta t} \right)_{\text{cond}} \quad \text{sau} \quad c = \frac{1}{m} \left(\frac{dQ}{dt} \right)_{\text{cond}} \quad (1)$$

De exemplu, căldura specifică la *presiune constantă* (sau volum constant) este căldura necesară unității de masă pentru a-și mări temperatura cu 1 grad, păstrând în procesul de încălzire *presiunea constantă* (sau volumul constant) :

$$c_p = \frac{1}{m} \left(\frac{dQ}{dt} \right)_p \quad \text{sau} \quad c_v = \frac{1}{m} \left(\frac{dQ}{dt} \right)_V \quad (2)$$

Prin urmare, în principiu, există o *infinitate* de călduri specifice în funcție de *condițiile* în care se desfășoară procesul de încălzire.

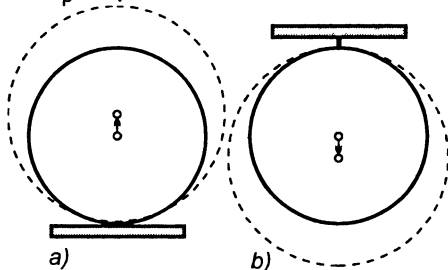
De exemplu, la gazele *ideale*, în procesele **politropice**, căldura molară este

$$C_k = C_v + R / (1 - k) = \text{const} \quad (3)$$

(k - exponent politropic). Căldura specifică poate să *nu* fie constantă de-a lungul unui proces de încălzire. Mai importante sunt căldurile specifice c_p și c_v care la solide sunt apropiate între ele, iar la gazele ideale

$$C_p - C_v = R \quad (\text{J. R. Mayer}). \quad (4)$$

Fig.8.1



În cazul problemei :

$$c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT} = \frac{1}{m} \frac{dU + dL}{dT} = \frac{1}{m} \frac{mc_v dT + dL}{dT} = c_v + \frac{1}{m} \frac{dL}{dT} . \quad (5)$$

Observăm că prin încălzire și dilatare, centrul de greutate urcă, respectiv coboară cu $R_0 \alpha dT$, deci se efectuează lucrul mecanic $\mp mg R_0 \alpha dT$ (egal cu minus variația energiei potențiale gravitaționale a sferei), $c = c_v \mp g R_0 \alpha = 395 \mp 16 \cdot 10^{-6} \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$. (6)
Efectul este extrem de mic.

8.2. Demonstrați că prin amestecarea a două volume diferite $V_{1,2}$ din același lichid, aflate la temperaturi inițiale diferite $t_{1,2}$, volumul total (global) nu se schimbă după atingerea echilibrului termic :

$$V_{1f} + V_{2f} = V_1 + V_2 = \text{invar} .$$

$$\text{Rezolvare. } V_1 = V_{01}(1 + \beta t_1), \quad V_2 = V_{02}(1 + \beta t_2) \quad (1)$$

Ecuția schimbului de căldură : $Q_{\text{ced}} = Q_{\text{prim}}$,

$$m_2 c(t_2 - \theta) = m_1 c(\theta - t_1), \quad m_1 = \rho_0 V_{01}, \quad m_2 = \rho_0 V_{02} \rightarrow$$

$$V_{02}(t_2 - \theta) = V_{01}(\theta - t_1) . \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Volumele finale : } V_{1f} &= V_{01}(1 + \beta\theta) = V_{01}[1 + \beta t_1 + \beta(\theta - t_1)] = \\ &= V_1 + V_{01}\beta(\theta - t_1), \quad V_{2f} = V_2 + V_{02}\beta(\theta - t_2) . \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{Volumul total : } V_{1f} + V_{2f} &= V_1 + V_2 + \beta [V_{01}(\theta - t_1) + V_{02}(\theta - t_2)] = \\ &= V_1 + V_2 , \end{aligned} \quad (4)$$

unde am ținut seama de (2) .

8.3. Un cilindru cu aria bazei $S = 1,00 \text{ dm}^2$ are un perete interior despărțitor, termoizolant, prevăzut cu o supapă ce se deschide numai dacă $p_2 > p_1$. Inițial în jumătatea stângă avem $m_1 = 12,0 \text{ g He}$, iar în dreapta $m_2 = 2,00 \text{ g He}$, temperatura fiind peste tot 0°C , $\ell = 1,12 \text{ m}$ și sistemul este izolat adiabatic de exterior. Presiunea atmosferică $H = 100 \text{ kPa}$. Împingem încet pistonul și când supapa se deschide, oprim puțin pistonul și apoi îl mișcăm încet până la peretele despărțitor. Ce lucru mecanic efectuăm noi ? Se dă $R = 8,3 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$.

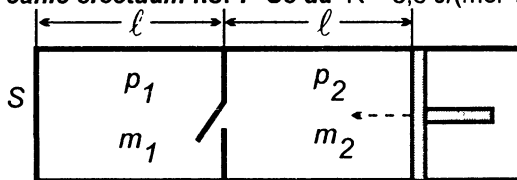


Fig.8.3

Rezolvare. Inițial presiunea din partea stângă este ($V = S \cdot \ell$) :

$$p_1 = (m_1 / \mu) RT / V = 600 \text{ kPa} , \quad (1)$$

iar în partea dreaptă : $p_2 = p_1 \cdot m_2 / m_1 = 100 \text{ kPa} . \quad (2)$

Împingând pistonul spre stânga, gazul din compartimentul drept se comprimă *adiabatic*. Supapa se va deschide numai atunci când presiunea atinge valoarea p_1 (1) . Aplicăm *legea lui Poisson*

pentru transformarea **adiabatică** : $pV^\gamma = \text{const} ,$
 $\gamma = C_p / C_v = c_p / c_v = (i + 2) / i = 5 / 3$, deci $p_2 V^{5/3} = p_1 V'^{5/3}$, (3)

de unde rezultă : $V' = V (p_2 / p_1)^{3/5} = 3,8 \text{ dm}^3 \quad (4)$

= volumul compartimentului drept în momentul deschiderii supapei.
În acest moment temperatura în dreapta a devenit T' , și anume din

$$T V^{\gamma-1} = \text{const} \rightarrow T' = T (V / V')^{\gamma-1} = 560 \text{ K} . \quad (5)$$

Lucrul mecanic efectuat de noi W în acest proces duce la creșterea *energiei interne* . În adevăr, din principiul I al termodinamicii $Q = \Delta U + L$, dar pentru un proces **adiabatic** $Q = 0$ și rezultă $\Delta U = -L = +W$, unde $L = -W$ este lucrul mecanic efectuat de gaz. Prin urmare, lucrul mecanic efectuat de noi W' este

$$W' = -L = \Delta U = m_2 c_v \Delta T = \\ = (m_2 / \mu) C_v \Delta T = (m_2 / \mu) (3R / 2) \Delta T = 1,80 \text{ kJ} . \quad (6)$$

Am folosit formula variației *energiei interne* a unui gaz ideal în orice transformare : $\Delta U = m c_v \Delta T = \nu C_v \Delta T$. *Energia internă a unui gaz ideal este funcție numai de temperatură (legea lui Joule)* .

De asemenea, la gazele ideale *monoatomice* ($i = 2$):

$$C_v = 3R / 2 = 12,5 \text{ J} / (\text{mol} \cdot \text{K}) , c_v = C_v / \mu , \mu_{\text{He}} = 4 \text{ g/mol} . \quad (7)$$

Odată supapa deschisă și pistonul menținut pe loc, se face un schimb de căldură între gazele din compartimente și la echilibru termodinamic temperatura va fi dată de ecuația :

$$m_2 c_v (T' - \theta) = m_1 c_v (\theta - T) , \\ \theta = (m_1 T + m_2 T') : (m_1 + m_2) = 314 \text{ K} . \quad (8)$$

Acum urmează a doua comprimare *adiabatică* a întregului gaz (supapa, odată deschisă, rămâne acum deschisă tot timpul) de la volumul

$$V + V' = 11,2 + 3,8 = 15,0 \text{ dm}^3 \quad (9)$$

la temperatura $\theta = 314 \text{ K}$, până la volumul final $V = 11,2 \text{ dm}^3$ și

temperatura finală T'' : $T'' = \theta [(V + V') / V]^{\gamma-1} = 382 \text{ K} . \quad (10)$

Lucrul mecanic efectuat mărește energia internă a gazului astfel :

$$W'' = m c_v (T'' - \theta) = 3,00 \text{ kJ} . \quad (11)$$

Lucrul mecanic total: $W = W' + W'' = 1,80 + 3,00 = 4,80 \text{ kJ}$.(12)

Trebuie scăzut însă de aici lucrul mecanic efectuat de presiunea exterioară atmosferică : $W_0 = H S \cdot \ell = 1,12 \text{ kJ}$. (13)

Prin urmare, rezultatul final este următorul :

$$W_{ef} = 4,80 - 1,12 = 3,68 \text{ kJ} . \quad (14)$$

8.4. Raportul de compresie al unui motor cu explozie în 4 timpi este $\varepsilon = 9,5 (= V_1 / V_2)$. În motor este aspirat aerul din mediul înconjurător la temperatura $t_1 = 27^\circ\text{C}$ și presiunea $p_1 = 100 \text{ kPa}$. În timpul aprinderii prin scânteie a combustibilului (a amestecului gazos) presiunea din cilindru se dublează. Presupunem că procesele din cilindru și funcționarea motorului sunt ideale, conform diagramei din figură. Procesele 1-2 și 3-4 sunt adiabatică ($\gamma = 1,40$). a) Ce fel de procese au loc între punctele 0-1, 2-3, 4-1 și 1-0 ? b) Determinați parametrii de stare p, T pentru toate stările care corespund punctelor diagramei. c) Determinați randamentul termic al motorului.

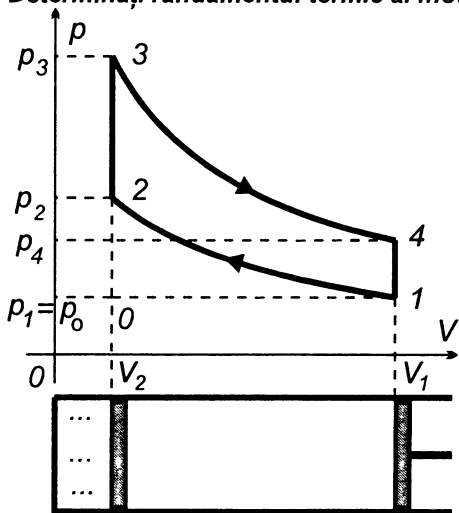


Fig.8.4

Rezolvare. a) 0-1 admisia - proces izobar; 2-3 aprinderea și arderea combustibilului - proces izocor; 4-1 deschiderea supapei de evacuare - proces izocor; 1-0 evacuarea - proces izobar .

b) $p_0 = p_1 = 100 \text{ kPa}$, $T_1 = 300 \text{ K}$, $p_3 = 2p_2$ și $\varepsilon = V_1 / V_2 = 9,5$.

1-2 comprimare adiabatică: $p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$, de unde

$$p_2 = p_1(V_1/V_2)^\gamma = p_1\varepsilon^\gamma = 2,34 \text{ MPa.} \quad (1)$$

$$T_2V_2^{\gamma-1} = T_1V_1^{\gamma-1}, \text{ de unde } T_2 = T_1\varepsilon^{\gamma-1} = 740 \text{ K.} \quad (2)$$

$$2-3 \text{ transformarea izocoră: } p_3 = 2p_2 = 4,68 \text{ MPa,} \quad (3)$$

$$T_3 = T_2 \cdot p_3/p_2 = T_2 \cdot 2 = 1480 \text{ K.} \quad (4)$$

$$3-4 \text{ transformarea adiabatică: } p_3V_2^\gamma = p_4V_1^\gamma,$$

$$p_4 = p_3(V_2/V_1)^\gamma = p_3\varepsilon^{-\gamma} = 2p_2\varepsilon^{-\gamma} = 2p_1 = 2,1 \text{ MPa,} \quad (5)$$

$$T_4V_1^{\gamma-1} = T_3V_2^{\gamma-1}, \quad T_4 = T_3\varepsilon^{1-\gamma} = 600 \text{ K.} \quad (6)$$

4-1 transformarea izocoră :

$$T_1' = T_4 \cdot p_1/p_4 = T_4/2 = T_1 = 300 \text{ K.} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \eta &= 1 - Q_{\text{ced}}/Q_{\text{abs}} = 1 - \nu C_V(T_4 - T_1) : [\nu C_V(T_3 - T_2)] = \\ &= 1 - (T_4 - T_1) : (T_3 - T_2) = 59,5 \%. \end{aligned} \quad (8)$$

8.5. Un balon cu aer cald are volumul constant $V = 1,10 \text{ m}^3$ și un orificiu inferior de comunicare cu atmosfera. Învelișul (anelopa) are masa $m = 0,187 \text{ kg}$ și volumul neglijabil în raport cu V . Balonul trebuie lansat la o temperatură a aerului exterior $t_1 = 20,0^\circ\text{C}$ și la o presiune normală a aerului exterior $p_0 = 101,3 \text{ kPa}$. În aceste condiții densitatea aerului este $\rho_1 = 1,20 \text{ kg/m}^3$. a) Ce temperatură t_2 trebuie să aibă aerul cald din interiorul balonului pentru ca el să rămână în suspensie ? b) Aerul din interiorul balonului, balon fixat acum printr-un fir de Pământ, este adus la temperatura constantă $t_3 = 110^\circ\text{C}$. Determinați forța care acționează asupra firului. c) Se închide orificiul balonului (densitatea aerului din interior rămâne constantă). Cu temperatura constantă a aerului interior $t_3 = 110^\circ\text{C}$, balonul urcă într-o atmosferă izotermă cu $t_1 = 20^\circ\text{C}$ și cu presiunea la sol $p_0 = 101,3 \text{ kPa}$. Ce înălțime h atinge balonul în aceste condiții ? d) La înălțimea h (determinată la punctul c) balonul este deplasat cu $\Delta h = 10 \text{ m}$ din poziția sa de echilibru și apoi lăsat liber. Ce fel de mișcare va efectua balonul ?

Rezolvare. a) Condiția de plutire a balonului :

$$\rho_2V + m = \rho_1V, \quad \rho_2 = \rho_1 - m/V = 1,03 \text{ kg/m}^3. \quad (1)$$

Pe de altă parte, $\rho_2/\rho_1 = (p_2/p_1)(T_1/T_2) = T_1/T_2$, de unde

$$T_2 = T_1(\rho_1/\rho_2) = 341,5 \text{ K}, \quad t_2 = 68,4^\circ\text{C}. \quad (2)$$

b) Tensiunea din fir este egală cu diferența dintre forța arhimedică și greutatea balonului cu conținutul său :

$$F = \rho_1 Vg - (\rho_3 V + m)g, \text{ unde } \rho_3 = \rho_1 T_1 / T_3 = 0,913 \text{ kg/m}^3. (3)$$

Cu aceste date obținem tensiunea din fir :

$$F = [(\rho_1 - \rho_3)V - m]g = 1,2 \text{ N} . (4)$$

c) Noua condiție de plutire la înălțimea h :

$$\rho_3 V + m = \rho_h V, \quad \rho_h = \rho_3 + m / V = 1,088 \text{ kg/m}^3. (5)$$

Dar formula *barometrică* ne dă: $\rho_h = \rho_1 e^{-\mu gh / (RT)} = \rho_1 e^{-\rho_1 gh / \rho_0}$,

de unde
$$h = [\rho_0 / (\rho_1 g)] \ln(\rho_1 / \rho_h) = 843 \text{ m} . (6)$$

d) Diferența $\Delta h = 10 \text{ m} \ll h = 843 \text{ m}$, de aceea variația exponențială a densității cu altitudinea se poate aproxima cu o funcție *liniară* :

$$\Delta \rho_h = \rho_h (-\rho_1 g / \rho) \cdot \Delta h \approx -k \cdot \Delta h. (7)$$

Apare deci o forță de *revenire* proporțională cu depărtarea (elongația) de la poziția de echilibru, datorită variației forței arhimedice :

$$\Delta \rho_h Vg = -\rho_h Vg (\rho_1 g / \rho) \cdot \Delta h . (8)$$

O astfel de forță de tip **elastic** generează oscilații **sinusoidale armonice**, dar datorită forței de *rezistență* (frecare) a aerului, aceste oscilații vor fi **amortizate**.

* * *

SISTEMUL INTERNAȚIONAL DE UNITĂȚI

Scopul fizicii este descrierea , explicarea și prevederea fenomenelor naturii, pentru a le putea stăpâni și folosi.

Fizica stabilește **legi** pe baza *observațiilor* și a *experimentului* științific.

Legea exprimă legătura *necesară* și *esențială* între fenomene, legătura dintre *cauză* și *efect*, care condiționează o dezvoltare determinată a fenomenelor.

1. Sistem coerent de unități. Descrierea și explicarea fenomenelor, deci formularea **legilor**, trebuie să fie **cantitativă** - condiție fundamentală a științelor *exacte* - de aceea **matematica** este un instrument indispensabil fizicii. Dar cantitatea se determină numai prin **măsurări**, de aceea **măsurarea** este un proces fundamental în fizică.

A măsura o mărime înseamnă a stabili de câte ori se cuprinde în ea o altă mărime de aceeași natură, bine definită și aleasă prin convenție drept **unitate de măsură**.

Notăm cu $[A]$ **unitatea** de măsură pentru mărimea fizică A și cu a valoarea sa **numerică-măsurată**, atunci prin convenție:

$$a = A : [A] , \quad A = a \cdot [A] . \quad (1)$$

Dacă **unitatea** de măsură $[A]$ se **mărește** de n ori, valoarea numerică-măsurată a se **micșorează** de n ori.

Orice măsurare fizică este întotdeauna un **proces de interacțiune** între obiectul măsurat și dispozitivul de măsură, proces care **modifică și starea obiectului măsurat** (pentru microparticule această perturbare este **principlal** inevitabilă).

Nici o măsurare fizică nu este perfectă, orice măsurare fizică implică totdeauna **erori de măsurare** mai mari sau mai mici. Odată cu dezvoltarea științei și tehnicii se perfecționează și tehnica măsurărilor. Astăzi în multe domenii (de exemplu, în optică și în astronomie) s-a atins o precizie de măsurare extrem de înaltă.

În principiu, pentru fiecare mărime fizică se poate alege o unitate proprie arbitrară, dar atunci legile fizicii s-ar exprima prin formule care ar conține **coeficienți numerici paraziti**, dependenți de unitățile folosite. De aceea, ținând seama de relațiile care există

între diferite mărimi fizice, se alege totdeauna un număr **mic** de mărimi, numite **fundamentale**, și pe baza acestora se construiește un **sistem coerent de unități**, astfel încât în cele mai frecvente și mai importante formule fizice să dispară coeficienții paraziți. Celelalte mărimi și unități, legate de cele fundamentale prin legi ale fizicii, se numesc **mărimi și unități derivate**.

Nu există vreo lege a naturii care să ne impună alegerea anumitor mărimi drept mărimi **fundamentale** sau să ne indice numărul acestora. De aceea, în principiu, s-ar putea alege o **singură** unitate arbitrară pentru o **singură** mărime considerată fundamentală (de exemplu, lungimea sau durata), toate celelalte fiind astfel derivate.

În practică se aleg totdeauna cel puțin **trei** unități fundamentale. Întrucât materia există și se mișcă în **spațiu și timp**, care sunt formele sale de existență, se aleg în primul rând **lungimea și durata** ca mărimi fundamentale. La aceste caracteristici **externe** ale materiei se adaugă cel puțin o mărime caracteristică **internă** a materiei, cum este **masa** sau **sarcina electrică** (curentul electric).

De exemplu, în sistemul CGS (Gauss) se aleg trei unități fundamentale : centimetrul (C), gramul (G) și secunda (S).

2. Unități SI fundamentale. În sistemul Internațional SI (adoptat de Conferința Generală de Măsuri și Greutăți, Paris, oct. 1960) se aleg **șapte** unități fundamentale, dintre care primele **trei** intervin în mecanică și în toată fizica, celelalte unități fiind alese pentru fiecare domeniu fundamental al fizicii (electricitate, termodinamică, optică).

1. **Unitatea de lungime metrul :**

Metrul este lungimea drumului parcurs de lumină în vid în timp de $1 / 299\,792\,458$ dintr-o secundă (1983).

Observație. În SI viteza luminii în vid este considerată **fixă și exactă** prin **convenție** :

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s} . \quad (2)$$

2. **Unitatea de masă kilogramul :**

Kilogramul este egal cu masa prototipului internațional al kilogramului (din platină iridiată, păstrat la Biroul Internațional)(1901).

3. **Unitatea de timp secunda :**

Secunda este durata a $9\,192\,631\,770$ perioade ale radiației care corespunde tranziției între cele două nivele de energie hiperfine ale stării fundamentale a atomului de cesiu 133 (1967).

4. **Unitatea de curent electric amperul :**

Amperul este intensitatea unui curent *constant* care, menținut în doi conductori paraleli, rectilinii, cu lungimea infinită și cu secțiunea circulară neglijabilă, așezați în vid, la o distanță de 1 metru unul de altul, ar produce între acești conductori o forță de $2 \cdot 10^{-7}$ newtoni pe o lungime de 1 metru (1948).

Observație. În locul denumirii "intensitatea curentului electric" se folosește acum denumirea "curentul electric".

5. *Unitatea de temperatură termodinamică kelvinul :*

Kelvinul este fracțiunea $1/273,16$ din temperatura *termodinamică* a punctului *triplu* al apei (1967).

Observație. Unitatea kelvin și simbolul său K se folosesc și pentru a exprima un *interval* sau o *diferență de temperatură*.

Temperatura Celsius termodinamică este definită prin relația:

$$t = T - T_0 = T - 273,15 . \quad (3)$$

Observație. Nu confundați 273,16 K - temperatura punctului *triplu* al apei, cu 273,15 K - temperatura de *topire* a gheții.

6. *Unitatea de cantitate de substanță molul :*

Molul este *cantitatea de substanță* a unui sistem care conține tot atâtea entități elementare câți *atomi* există în 12 grame de carbon 12 (1971).

De câte ori se întrebuițează molul, entitățile elementare trebuie specificate, ele putând fi atomi, molecule, ioni, electroni, alte particule sau grupuri specificate de asemenea particule.

Observație. Nu confundați mărimea *masă* care se măsoară cu *kilogramul*, cu mărimea *cantitate de substanță* care se măsoară cu *molul*.

7. *Unitatea de intensitate luminoasă candela :*

Candela este intensitatea luminoasă, într-o direcție dată, a unei surse care emite o radiație monocromatică cu frecvența de $540 \cdot 10^{12}$ Hz și a cărei intensitate energetică, în această direcție, este $1 / 683$ W/sr (1979).

Unități SI fundamentale

Mărimea	Denumirea	Simbolul
Lungime	Metru	m
Masă	Kilogram	kg
Timp	Secundă	s
Curent electric	Amper	A
Temperatură termodinamică	Kelvin	K
Cantitate de substanță	Mol	mol
Intensitate luminoasă	Candelă	cd

3. Formule dimensionale. Să notăm unitățile mărimilor fundamentale cu litere majuscule fără paranteze : L, M, T, I, Θ, N, J . Atunci pentru orice unitate derivată avem ecuația :

$$[A] = L^a M^b T^c I^d Q^e N^f J^g, \quad (4)$$

numită *ecuația de dimensiuni* sau *formula dimensională* a mărimii A față de mărimile fundamentale alese. Exponenții a, b, c, ... sunt *numere întregi*. Se spune că mărimea A are dimensiunea a față de lungime, dimensiunea b față de masă, etc.

Constantele care intervin în legile fizicii pot fi atât *dimensionale* (de exemplu, constanta atracției gravitaționale, constanta lui Planck, etc), cât și *adimensionale* (în ultimul caz nu intervin în formula dimensională).

Principiul omogenității dimensionale a formulelor fizicii :

Deoarece nu se pot aduna sau egala decât mărimi fizice de *aceeași natură* , oricare formulă fizică trebuie să fie **omogenă** din punct de vedere **dimensional**, adică ambii membri ai unei egalități, cât și fiecare termen al unei sume trebuie să aibă **aceleași dimensiuni fizice** sau **aceleași unități de măsură**, altfel formula nu are sens.

Observăm că există cazuri când două mărimi de natură diferită pot avea totuși aceeași dimensiune (de exemplu, lucrul mecanic și momentul forței : L^2MT^{-2} , entropia și capacitatea calorică : $L^2MT^{-2}\Theta^{-1}$, etc.)

4. Unități derivate. Pentru a stabili unitatea de măsură pentru o mărime *derivată* (deci alta decât cele 7 fundamentale), într-un sistem *coerent* de unități, plecăm de la cea mai importantă și mai uzuală formulă care conține mărimea considerată și punem condiția ca coeficientul numeric parazit să fie egal cu 1. Prin aceasta se fixează unitatea de măsură.

Exemple. a) Pentru definirea unității de *viteză* folosim legea mișcării *rectilinii uniforme* $\Delta x / \Delta t = \text{const}$. Cu o unitate arbitrară pentru viteză, ecuația mișcării se scrie $x = k \cdot vt$, unde k este un coeficient numeric parazit. De exemplu, dacă [v] = viteza sunetului în aer la 0°C și L = 1 m, T = 1 s , atunci $k = 331$; $x = 331 \cdot vt$.

Într-un sistem *coerent* de unități punem $k = 1$, atunci

$$v = x / t, \quad [v] = [x] / [t] = L / T = L \cdot T^{-1} = 1 \text{ m/s} . \quad (5)$$

Unitatea de viteză este egală cu viteza unui mobil care se deplasează *rectiliniu uniform*, parcurgând unitatea de lungime 1 m în unitatea de timp 1 s.

Unități derivate exprimate prin cele fundamentale

<i>Mărimea</i>	<i>Denumirea unității</i>	<i>Simbolul</i>
ane	metru pătrat	m ²
volum	metru cub	m ³
viteză	metru pe secundă	m/s
acelerație	metru pe secundă la pătrat	m/s ²
număr de undă	metru la puterea minus unu	m ⁻¹
densitate	kilogram pe metru cub	kg/m ³
volum specific (masic)	metru cub pe kilogram	m ³ /kg
densitatea curentului electric	amper pe metru pătrat	A/m ²
câmp magnetic	amper pe metru	A/m
concentrația cantității de substanță	mol pe metru cub	mol/m ³
luminanță	candelă pe metru pătrat	cd/m ²

b) Pentru definirea unității de *acelerație* folosim legea vitezei în mișcarea *rectilinie uniform accelerată*, scrisă fără coeficient numeric parazit :

$$a = (v - v_0) / t, \quad [a] = [v] / [t] = LT^{-1} / T = LT^{-2} = 1 \text{ m/s}^2. \quad (6)$$

Unitatea de accelerație este egală cu accelerația unui mobil care se deplasează rectiliniu uniform accelerat și a cărui viteză crește cu o unitate 1 m/s într-un timp egal cu unitatea 1 s.

c) Pentru definirea unității de *forță* folosim principiul *fundamental* al mecanicii (*lex secunda*) : $F = k \cdot ma$ și punem condiția $k = 1$:

$$F = ma, \quad [F] = [m] [a] = MLT^{-2} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 1 \text{ N}. \quad (7)$$

Unitatea de forță newton (N) este egală cu forța care aplicată unei mase unitate 1 kg îi imprimă o accelerație unitate 1 m/s².

Observăm că unele unități derivate pot fi exprimate în mai multe moduri, de exemplu, $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ W} \cdot \text{s}$; $1 \text{ N/C} = 1 \text{ V/m}$; $1 \text{ V} = 1 \text{ J/C} = 1 \text{ W/A} = 1 \Omega \cdot \text{A}$, etc.

Pentru a distinge mărimile fizice cu aceeași formulă dimensională se folosesc denumiri speciale, de exemplu, pentru momentul forței păstrăm 1 N · m, iar pentru lucrul mecanic 1 J ; pentru frecvență 1 Hz (= 1 s⁻¹) , iar pentru activitatea radiațiilor 1 Bq (= 1 s⁻¹) ; pentru doza absorbită 1 Gy (= 1 J/kg), iar pentru echivalentul dozei 1 Sv (= 1 J/kg) , etc. (Hz = Hertz , Bq = Becquerel, Gy = Gray , Sv = Sievert).

În sfârșit există două unități suplimentare: pentru unghiul plan: 1 rad și pentru unghiul solid (spațial) : 1 sr (steradian).

Observăm că simbolurile unităților , care provin din nume de savanți, se scriu cu prima literă majusculă (cu excepția unității tolerate torr), celelalte unități se scriu cu litere de rând (cu excepția litrului : 1 L \equiv 1 dm³).

Unități derivate cu denumire proprie

<i>Mărimea</i>	<i>Denumirea</i>	<i>Simb.</i>	<i>Expr. în alte unit.</i>	<i>Expresia în unit. fund.</i>
frecvență	hertz	Hz		s ⁻¹
forță	newton	N		m · kg · s ⁻²
presiune, tensiune elastică	pascal	Pa	N/m ²	m ⁻¹ · kg · s ⁻²
energie, lucru mecanic, căldură	joule	J	N · m	m ² · kg · s ⁻²
putere, flux energetic	watt	W	J/s	m ² · kg · s ⁻³
sarcină electrică	coulomb	C		s · A
potențial electric, tensiune electrică, t.e.m.	volt	V	W/A	m ² · kg · s ⁻³ · A ⁻¹
capacitate electrică	farad	F	C/V	m ⁻² · kg ⁻¹ · s ⁴ · A ²
rezistență electrică	ohm	Ω	V/A	m ² · kg · s ⁻³ · A ⁻²
conductanță electrică	siemens	S	A/V	m ⁻² · kg ⁻¹ · s ³ · A ²
flux de inducție magnetică	weber	Wb	V · s	m ² · kg · s ⁻² · A ⁻¹
inducție magnetică	tesla	T	W/m ²	kg · s ⁻² · A ⁻¹
inductanță	henry	H	Wb/A	m ² · kg · s ⁻² · A ⁻²
temperatura Celsius	grad Celsius	°C		K
flux luminos	lumen	lm		cd · sr
iluminare	lux	lx	lm/m ²	m ⁻² · cd · sr
activitatea unui radio-nuclid	becquerel	Bq		s ⁻¹
doză absorbită, energie comunicată masă-că, kerma, indicele dozei absorbite	gray	Gy	J/kg	m ² · s ⁻²
echivalentul dozei absorbite, indicele echi-valentului dozei absorbite	sievert	Sv	J/kg	m ² · s ⁻²

Unități derivate cu denumire combinată

Mărimea	Denumirea	Simbolul	Expresia în unit. fundamentale
viscozitate dinamică	pascal-secundă	$\text{Pa} \cdot \text{s}$	$\text{m}^{-1} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$
momentul forței	newton-metru	$\text{N} \cdot \text{m}$	$\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$
tensiune superficială	newton pe metru	N/m	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$
flux termic superficial, iluminare energetică	watt pe metru pătrat	W/m^2	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-3}$
capacitate termică, entropie	joule pe kelvin	J/K	$\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
căldură specifică, entropie masică	joule pe kilogram-kelvin	$\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
energie masică	joule pe kilogram	J/kg	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$
conductivitate termică	watt pe metru-kelvin	$\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$	$\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$
densitate de energie (energie volumică)	joule pe metru cub	J/m^3	$\text{m}^{-1} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$
câmp electric	volt pe metru	V/m	$\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1}$
densitate de sarcină electrică (sarcină volumică)	coulomb pe metru cub	C/m^3	$\text{m}^{-3} \cdot \text{s} \cdot \text{A}$
deplasare electrică (inducție electrică)	coulomb pe metru pătrat	C/m^2	$\text{m}^{-2} \cdot \text{s} \cdot \text{A}$
permițivitate	farad pe metru	F/m	$\text{m}^{-3} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2$
permeabilitate	henry pe metru	H/m	$\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$
energie molară	joule pe mol	J/mol	$\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1}$
entropie molară, căldură moiară	joule pe mol-kelvin	$\text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$	$\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
expunere (radiații X, γ)	coulomb pe kilogram	C/kg	$\text{kg}^{-1} \cdot \text{s} \cdot \text{A}$
debitul dozei absorbite	gray pe secundă	Gy/s	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$

Unități derivate care folosesc și unități suplimentare

Mărimea	Denumirea	Simbolul
viteză unghiulară	radian pe secundă	rad/s
acelerație unghiulară	radian pe secundă la pătrat	rad/s^2
intensitate energetică	watt pe steradian	W/sr
luminanță energetică	watt pe metru pătrat-steradian	$\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{sr})$

5. Analiza dimensională. Principiul omogenității dimensionale a formulelor fizicii ne permite să găsim chiar **forma** unor legi fizice.

De exemplu, știind din experiență că perioada de oscilație a unui pendul simplu gravitațional depinde de lungimea firului de suspenție ℓ și de accelerația gravitațională g , scriem

$$T = \text{const} \cdot \ell^\alpha g^\beta, \quad (8)$$

unde α și β sunt *constante*. Trecând la dimensiuni :

$$T = L^\alpha (LT^{-2})^\beta = L^{\alpha+\beta} T^{-2\beta}. \quad (9)$$

Prin identificarea exponenților din stânga și dreapta, găsim :

$$0 = \alpha + \beta, \quad 1 = -2\beta, \quad \text{de unde } \alpha = 1/2, \quad \beta = -1/2,$$

deci perioada de oscilație a pendulului simplu gravitațional :

$$T = \text{const} \cdot \ell^{1/2} g^{-1/2} = \text{const} \sqrt{\ell/g}, \quad (10)$$

unde *const* este o constantă de ordinul unității (știm că este 2π).

6. Multipli și submultipli. Pentru multiplii și submultiplii diferitelor unități se folosesc următoarele prefixe :

<i>Multipli</i>	<i>prefix</i>	<i>unități</i>	<i>Submultipli</i>	<i>prefix</i>	<i>unități</i>
deca	da	10	deci	d	10^{-1}
hecto	h	10^2	centi	c	10^{-2}
kilo	k	10^3	mili	m	10^{-3}
mega	M	10^6	micro	μ	10^{-6}
giga	G	10^9	nano	n	10^{-9}
tera	T	10^{12}	pico	p	10^{-12}
peta	P	10^{15}	femto	f	10^{-15}
exa	E	10^{18}	atto	a	10^{-18}

Nu se folosesc simultan două prefixe la aceeași unitate și se recomandă a nu se folosi prefixe la numitor.

7. Unități tolerate. Câteva exemple de unități *tolerate*.

Litrul cu simbolul L este definit din 1979 ca fiind *identic* cu 1 dm^3 : $1 \text{ L} \equiv 1 \text{ dm}^3$.

Kilogramul-forță și **atmosfera tehnică** :

$$1 \text{ kgf} = 9,80665 \text{ N}; \quad 1 \text{ at} \equiv 1 \text{ kgf/cm}^2 = 98066,5 \text{ Pa} \approx 98 \text{ kPa}.$$

Torrul sau **mm Hg** este presiunea exercitată de o coloană de mercur înaltă de 1 mm, la temperatura de 0°C , în câmpul gravitațional *normal* (standard) $g_n = 9,80665 \text{ m/s}^2$:

$$1 \text{ torr} \equiv 1 \text{ mm Hg} = 133,322 \text{ Pa} \approx 133,3 \text{ Pa}.$$

$$\textbf{Atmosfera fizică} : 1 \text{ atm} = 760 \text{ torr} = 101325 \text{ Pa} \approx 101,3 \text{ kPa}.$$

ELEMENTE DE CALCUL AL ERORILOR

În cercetările de fizică experimentală distingem două feluri de determinări de mărimi fizice : 1) *Măsurători directe*, de exemplu, măsurarea lungimilor cu o riglă, a maselor cu o balanță, a temperaturilor cu un termometru, a duratelor cu un cronometru, a forțelor cu un dinamometru, a curentului electric cu un ampermetru, a tensiunii electrice cu un voltmetru, etc. 2) *Măsurători indirecte*, când mărimea fizică se obține prin *calcul*, folosind rezultatele unor măsurători directe și aplicând anumite relații matematice, deduse pe baza legilor fizicii, de exemplu, măsurarea accelerației, lucrului mecanic, coeficientului de frecare, momentului de inerție, constantelor elastice, a căldurii, coeficienților calorici, etc.

1. CLASIFICAREA ERORILOR

Orice măsurătoare fizică implică totdeauna erori. Distingem

1) *Erori de măsură* (erori inevitabile). Acestea se datorează imperfecțiunii simțurilor și a aparatelor. Valorile citite pe un aparat de măsură sunt doar mai mult sau mai puțin apropiate de valoarea exactă, evident necunoscută, a mărimii măsurate. Aceste erori nu pot fi cunoscute exact, dar ele nu pot depăși eroarea maximă, corespunzătoare preciziei aparatului folosit.

Uneori în calcule se folosesc anumite *constante fizice*, extrase din *Tabele speciale* publicate. Aceste constante au în general erori foarte *mici*, neglijabile (dacă păstrăm un număr suficient de cifre) față de erorile mărimilor măsurate în mod obișnuit într-un laborator pentru elevi sau studenți.

2) *Erori de rotunjire*. În calcule pot interveni numere *iraționale*, având o *infinitate* de zecimale (radicali, π , e , logaritmi, funcții trigonometrice, exponențiale). Evident, suntem nevoiți să păstrăm în calcule un număr *limitat* de zecimale. Eroarea comisă se poate neglija dacă păstrăm un număr suficient de zecimale.

3) *Erori de metodă*. Adesea suntem nevoiți să înlocuim problema dată (propusă) cu alta mai simplă (aproximativă), ceea ce implică evident o anumită eroare, chiar dacă datele inițiale ar fi cunoscute exact și calculele ar fi făcute exact.

Erorile se mai pot clasifica în:

1) *Erori sistematice*. Aceste erori se caracterizează prin faptul că se produc totdeauna *în același sens*. Deosebim : a) erori *instrumentale*, datorite defecțiunii aparatelor, de exemplu, etalonarea defectuoasă a aparatului de măsură, deplasarea scalei etc. ; b) erori *personale*, datorite unor lipsuri în deprinderile și dexteritatea experimentatorului ; c) erori *teoretice*, datorite neglijării unor factori fizici sau unor acțiuni exterioare permanente sau datorite formulei de calcul imprecise sau greșite. Erorile sistematice pot fi reduse, introducând *corecții* adecvate.

2) *Erori accidentale* (întâmplătoare, aleatorii). Aceste erori se caracterizează prin faptul că se produc atât într-un sens cât și în celălalt și se datorează unor factori variabili sau nedeterminați, care nu pot fi controlați de experimentator, adică se datoresc *întâmplării*.

3) *Erori grosolane* sau greșeli. Aceste erori sunt mult mai mari decât erorile obișnuite și se datoresc neatenției experimentatorului: citire greșită la un aparat, notație greșită a rezultatului, confuzie, omisiuni. Aceste erori pot fi recunoscute relativ ușor și eliminate din considerație.

2. ERORI ABSOLUTE ȘI ERORI RELATIVE

Măsurând o mărime fizică X găsim o anumită valoare numerică x , apropiată mai mult sau mai puțin de valoarea exactă x_0 (evident necunoscută) a mărimii măsurate.

Se numește **eroare absolută** diferența (abaterea) $\delta x = x_0 - x$ dintre valoarea exactă și valoarea măsurată.

Necunoscându-l pe x_0 , nu putem cunoaște exact nici pe $x_0 - x$, dar putem totdeauna evalua marginea superioară a erorilor absolute, după cum vom vedea.

Se numește **eroare relativă** raportul :

$$\frac{x_0 - x}{x_0} = \frac{\delta x}{x_0} \quad (1)$$

dintre eroarea absolută și valoarea exactă a mărimii măsurate.

De obicei erorile sunt mici, adică $|\delta x| \ll x_0$, $x \approx x_0$, astfel încât practic se folosește *eroarea relativă aparentă* :

$$\varepsilon_x = \frac{x_0 - x}{x} = \frac{\delta x}{x}, \quad (2)$$

unde eroarea absolută δx (care se poate evalua) este raportată la valoarea *măsurată* (deci *cunoscută*).

Eroarea absolută se măsoară în aceleași unități ca și mărimea însăși, în timp ce eroarea relativă nu are dimensiuni și se exprimă adesea în procente. Eroarea *relativă* caracterizează mai bine precizia unei măsurători și, fiind *adimensională*, permite compararea preciziei de măsurare a mărimilor de naturi diferite. De exemplu, distanța București - Ploiești (60 km) măsurată cu o eroare absolută de 6 m înseamnă o eroare relativă de 0,01 % , pe când o clădire de 60 m măsurată cu aceeași eroare absolută de 6 m înseamnă de fapt o măsurătoare foarte grosolană față de cea precedentă, deoarece acum eroarea relativă este de 10 % .

3. ROTUNJIRI

1) **Rotunjiri**. Am arătat necesitatea de a păstra în calcule un număr limitat de cifre. Pentru a comite o eroare minimă se respectă următoarea **regulă** :

Dacă cifra neglijată este mai mare decât 5, se adaugă o unitate la cifra precedentă păstrată, iar dacă cifra neglijată este mai mică decât 5, nu se adaugă nimic

Exemplu :

$$2,804\ 953 \rightarrow 2,804\ 95 \rightarrow 2,805\ 0 \rightarrow 2,805 \rightarrow 2,80 \rightarrow 2,8 \rightarrow 3. \quad (3)$$

Eroarea comisă prin rotunjire nu depășește evident 0,5 din valoarea unității din ultima cifră păstrată.

2) **Cifre "exacte"**. O cifră a unui număr se consideră "**exactă**", dacă valoarea unei unități din această cifră este mai *mare* decât eroarea absolută a numărului. Cifra "**exactă**" este cifra *optimă*, care corespunde erorii *minime*, în sensul că, dacă mărim sau micșorăm această cifră, eroarea va crește.

De exemplu, prin rotunjirea numerelor iraționale toate cifrele vor fi "exacte". Ultima cifră "exactă" poate să nu fie *strict* exactă, dar în orice caz nu diferă de cea strict exactă prin mai mult decât o unitate.

3) **Regulă de scriere a numerelor aproximative.** Dacă nu indicăm eroarea absolută, atunci printr-un număr adecvat de rotunjiri trebuie să scriem numărul astfel încât eroarea să nu depășească valoarea unei unități din ultima cifră scrisă, *toate cifrele fiind deci "exacte"*. La nevoie se folosește factorul 10^k , k fiind un întreg convenabil. Dacă indicăm eroarea absolută a numărului, atunci pe lângă cifrele "exacte" se mai scrie și cifra următoare, numită *cifră "îndoielnică"*. *Este inutil să scriem și cifrele următoare deoarece sunt inexacte. Vom scrie deci numărul cu tot atâtea zecimale câte zecimale are eroarea absolută*

Exemplu. Sarcina elementară este $e = (1,602\,177\,3 \pm 1) \cdot 10^{-19}$ C. Dacă nu indicăm eroarea, trebuie să scriem numărul de exemplu astfel :

$$1,602\,177 \cdot 10^{-19} \approx 1,6022 \cdot 10^{-19} \approx 1,60 \cdot 10^{-19} = 160 \cdot 10^{-21} \text{ C.} \quad (4)$$

În ultimele două expresii cifra 0 este cifră "exactă", adică eroarea numărului scris astfel este sub $0,01 \cdot 10^{-19} = 1 \cdot 10^{-21}$ C, adică

$$1,59 \cdot 10^{-19} \leq e \leq 1,61 \cdot 10^{-19} \text{ sau } 159 \cdot 10^{-21} \leq e \leq 161 \cdot 10^{-21} .$$

Ar fi incorect să scriem de exemplu $e = 160\,000 \cdot 10^{-24}$ C fără a indica eroarea, deoarece ar rezulta că eroarea numărului scris astfel este sub $1 \cdot 10^{-24}$ C, adică $159\,999 \cdot 10^{-24} \leq e \leq 160\,001 \cdot 10^{-24}$ C, ceea ce este greșit (în partea dreaptă).

4. **Cifre semnificative.** Se numesc **cifre semnificative** toate cifrele "exacte" și cifra "îndoielnică" ale numărului scris conform regulii precedente, *fără* a socoti zerourile *din fața* numărului, care indică doar ordinul cifrelor următoare și pot fi totdeauna eliminate folosind un factor 10^k , k - număr întreg (deci mutând virgula convenabil). De exemplu, coeficientul de tensiune superficială al apei

$$\sigma = 0,073 \text{ N/m} = 73 \cdot 10^{-3} \text{ N/m} = 73 \text{ mN/m} \quad (5)$$

are două cifre semnificative.

Dacă, de exemplu, cerem o masă de 27,5 g cântărită cu o precizie de 1 mg, trebuie să scriem $m=27,500$ g. Ultimele două zerouri sunt cifre semnificative ("exacte") și trebuie neapărat scrise.

Dacă un rezultat experimental este scris sub forma $x = 0,000\,3$, deși sunt patru zecimale, precizia este grosolană, întrucât avem o singură cifră semnificativă 3, adică $x = (3 \pm 1) \cdot 10^{-4}$ și eroarea relativă este $\varepsilon_x = 1/3 = 33\%$. Situația se schimbă radical dacă rezultatul este scris sub forma $x = 0,000\,30 = 30 \cdot 10^{-5}$, deoarece acum

ultimul zero este cifră semnificativă: $x = (30 \pm 1) \cdot 10^{-5}$ și eroarea relativă este $e_x = 1/30 = 3,3 \%$.

Nu importă numărul zecimalelor (adică poziția virgulei), ci numărul cifrelor semnificative.

Observație. Eroarea absolută, indicând un domeniu de nedeterminare, nu trebuie nici adăugată, nici scăzută din numărul considerat, ci *scrisă în continuare cu semnul \pm și în aceleași unități.*

Exemplu. Prin înmulțire, împărțire, extragere de radical, etc., apar multe cifre. Chiar dacă *toate* cifrele inițiale sunt *riguros exacte*, nu toate cifrele rezultatului sunt exacte ! (ceea ce pare la prima vedere paradoxal). Iată un exemplu:

Am cântărit (de exemplu, cu o balanță analitică) un vas calorimetric din alamă : $m = 40,45 \text{ g}$, unde *toate* cifrele sunt *riguros exacte*. Căldura specifică a alamei $c = 0,37 \text{ J/(g} \cdot \text{K)}$ (luată din Tabele), unde iarăși *toate* cifrele sunt *riguros exacte*. Să calculăm capacitatea calorică a vasului calorimetric.

$$C = mc : \quad \begin{array}{r} 40,45 \\ \underline{0,37} \\ 28315 \\ \underline{12135} \\ 14,9665 \end{array}$$

$$C = 14,9665 \text{ J/K} .$$

La prima vedere, *toate* cifrele acestui rezultat ar trebui să fie *riguros exacte*, din moment ce *toate* cifrele factorilor au fost *riguros exacte*. În realitate *nu* este așa !

În numărul $m = 40,45 \text{ g}$ noi nu cunoaștem cifra care urmează după 5 (de exemplu, n-am putut-o măsura), la fel în numărul $c = 0,37 \text{ J/(g} \cdot \text{K)}$ nu cunoaștem cifra care urmează după 7. Să înlocuim aceste cifre cu semne de întrebare și să efectuăm din nou înmulțirea :

$$\begin{array}{r} 40,45? \\ \underline{0,37?} \\ ????? \\ 28315? \\ \underline{12135?} \\ 14,9665?? \\ ??? \end{array}$$

Se vede că ultimele 3 cifre , 665, **nu sunt exacte**, ba chiar cifra 9 ar putea crește cu o unitate posibilă de la cifra următoare. De aceea, rezultatul trebuie rotunjit, eliminând ultimele 3 cifre :

$$C = 14,9665 \approx 15,0 \text{ J/K.}$$

Aici cifra 0 **trebuie păstrată**, fiind cifră semnificativă .

4. FORMULE PENTRU CALCULE APROXIMATIVE

Calculul erorilor este un calcul *aproximativ de evaluare* a erorilor, de aceea se fac *aproximații* pe deplin justificate. Dăm mai jos câteva formule utile.

$$a) \quad (1+x)(1+y)(1+z) \dots \approx 1+x+y+z \dots, \quad (6)$$

dacă $|x| \ll 1$, $|y| \ll 1$, $|z| \ll 1$, ...

Formula se obține ușor, desfăcând parantezele, păstrând termenii liniari (de gradul 1) și neglijând termenii de grad superior care sunt mici.

$$\frac{1}{1 \pm x} = \frac{1 \mp x}{1 - x^2} \approx 1 \mp x, \quad \text{dacă } |x| \ll 1; \quad (7)$$

$$\frac{1}{a \pm b} = \frac{1}{a(1 \pm b/a)} \approx \frac{1}{a} \left(1 \mp \frac{b}{a} \right), \quad \text{dacă } |b| \ll |a|, \text{ adică } |b/a| \ll 1;$$

$$\sqrt{1 \pm x} \approx \sqrt{1 \pm x + x^2/4} = \sqrt{(1 \pm x/2)^2} = 1 \pm x/2, \quad \text{dacă } |x| \ll 1;$$

$$\sqrt{a \pm b} = \sqrt{a(1 \pm b/a)} \approx \sqrt{a} \left(1 \pm \frac{b}{2a} \right) = \sqrt{a} \pm \frac{b}{2\sqrt{a}}, \quad \text{dacă } |b| \ll a > 0. \quad (8)$$

$$\frac{(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3) \dots}{(1+y_1)(1+y_2)(1+y_3) \dots} \approx 1+x_1+x_2+x_3+\dots-y_1-y_2-y_3-\dots, \quad (9)$$

dacă $|x_i| \ll 1$, $|y_i| \ll 1$, $i = 1, 2, 3, \dots$

Exemplu. Presiunea atmosferică H în torr, în funcție de înălțimea barometrică B , în mm (citită pe o riglă etalonată la 0°C), coeficientul de dilatare liniară α al riglei și coeficientul de dilatare β al mercurului este: $H_{[\text{torr}]} = B_{[\text{mm}]} \cdot (1 + \alpha t) : (1 + \beta t) \approx$

$$\approx B(1 + \alpha t) \cdot (1 - \beta t) \approx B[1 + (\alpha - \beta)t],$$

deoarece $\alpha t \ll 1$ și $\beta t \ll 1$.

b) Mai general:

$$(1+x)^r \approx 1 + rx + (1/2)r(r-1)x^2 \approx 1 + rx, \quad \text{dacă } |x| \ll 1, \quad (10)$$

unde r este un număr real ($r \in \mathbf{R}$) de ordinul unităților .

Formula se obține din dezvoltarea în serie a binomului, păstrând primii termeni. De exemplu,

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = (1 \pm x)^{-1/2} \approx 1 \mp x/2, \text{ dacă } |x| \ll 1, \text{ (aici } r = -1/2 \text{)}.$$

c) Din dezvoltările în serie de puteri ale diferitelor funcții (trigonometrice, exponențiale, logaritmice, funcțiile lor inverse, etc.), păstrând primii termeni, obținem formule de aproximație :

$\sin x \approx x - x^3/6 \approx x$; $\cos x \approx 1 - x^2/2 \approx 1$; $\operatorname{tg} x \approx x + x^3/3 \approx x$, unde x este în **radiani** și $|x| \ll 1$ rad, adică $x < 6^\circ$,

$$1 \text{ rad} = 360^\circ / (2\pi) = 180^\circ / \pi = 57^\circ 17' 44'',8 \approx 57^\circ.$$

$$e^x \approx 1 + x + x^2/2 \approx 1 + x, \text{ dacă } |x| \ll 1, \quad (11)$$

$$a^x = e^{x \ln a} \approx 1 + x \ln a, \text{ dacă } |x \ln a| \ll 1,$$

$$\ln(1 + x) \approx x - x^2/2 \approx x, \text{ dacă } |x| \ll 1. \quad (12)$$

5. ERORI DE CITIRE

1. Prin **erori de citire** vom înțelege erorile de **măsură directă** a unei mărimi fizice, de exemplu, măsurarea lungimii cu o riglă, a timpului cu un cronometru, a masei cu o balanță, a temperaturii cu un termometru, a curentului electric cu un ampermetru, etc.

Evident, nu putem cunoaște exact eroarea de citire, dar putem totdeauna **evalua eroarea maximă** de citire, care nu poate depăși precizia aparatului folosit. Dacă pe aparat nu este indicată precizia sa, putem lua drept eroare absolută maximă de citire valoarea **celeii mai mici diviziuni** în care este gradată scala aparatului sau chiar 0,5 din această valoare. Într-adevăr, aparatele de măsură (riglele, cronometrele, termometrele, voltmetrele, etc.) se fabrică în serie, admitându-se anumite toleranțe ale preciziei indicațiilor, prin comparație cu etaloane speciale. Este inutilă gradarea scalei aparatului în diviziuni mai fine decât precizia lui, întrucât cifrele corespunzătoare acestora oricum n-ar fi sigure (la fel cum este inutilă scrierea zecimalelor neprecise ale unui număr aproximativ). Chiar dacă precizia aparatului ar fi mai înaltă decât valoarea celeii mai mici diviziuni, tot n-am putea aprecia exact, cu ochiul liber, fracțiuni **mai mici decât o jumătate** din diviziunea cea mai mică marcată pe scală. De aceea se ia drept **eroare maximă de citire jumătate din valoarea celor mai mici diviziuni** marcate pe scală.

Exemple. La măsurarea lungimilor cu o riglă obișnuită putem lua $\delta x \approx 0,5 \text{ mm}$; dacă avem un *vernier* 1/10, atunci $\delta x \approx 0,05 \text{ mm}$. La cronometrări putem lua $\delta t \approx 0,2 \text{ s}$ sau chiar mai mult datorită timpilor morți la pornire și oprire. La cântăriri putem lua pentru δm jumătate din valoarea celei mai mici mase marcate, la care mai este sensibilă (răspunde) balanța. La citiri de temperatură, δt va fi jumătate din valoarea diviziunii minime în care este gradat termometrul folosit.

2. Erori accidentale. Dacă măsurăm o mărime X (lungime, masă etc.) **repetat** de N ori, în **aceleași** condiții și cu **aceeași** precizie (cu același aparat, cu aceeași conștiinciozitate etc.), vom obține valori numerice x_i , $i = 1, 2, 3, \dots, N$, împrăștiate (grupate) în jurul valorii reale x_0 .

Erorile accidentale se bucură de două proprietăți importante :
 1) Valorile numerice x_i sunt împrăștiate **simetric** (în cazul unui număr *suficient* de măsurători: $N \approx 10 \dots 15$) în jurul valorii reale x_0 .
 2) Erorile mari în modul sunt puțin numeroase (rare), în timp ce erorile mici în modul sunt mai numeroase (frecvente).

Se poate arăta că pentru un șir de N măsurători de *egală* precizie **valoarea cea mai probabilă** sau **cea mai bună** a mărimii măsurate este **media aritmetică** a rezultatelor obținute :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (13)$$

Eroarea **mediei aritmetice** este mai mică de \sqrt{N} ori (dacă $N > 10$) decât eroarea unei măsurători individuale (izolate). O măsură a erorii mediei aritmetice ($N > 10$) este dată de **eroarea pătratică medie** :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2} \quad (14)$$

Atunci rezultatul final al unui **șir** de măsurători se scrie sub forma:

$$x = \bar{x} \pm \sigma$$

Observație. Rezultatele x_i care sunt în **totală discrepantă** cu \bar{x} sunt **erori grosolane** (greșeli datorite neatenției) și trebuiesc eliminate. Cu datele rămase se recalculează media aritmetică și eroarea pătratică medie.

6. ERORILE FUNCȚIILOR

1. Majoritatea mărimilor fizice se măsoară *indirect*, adică se determină prin *calcul* cu ajutorul unei formule în care intră mărimi ce sunt măsurate direct. Știind erorile argumentelor trebuie să calculăm eroarea care rezultă pentru funcție. În special ne interesează eroarea *maximă* a funcției, cunoscând erorile *maxime* ale argumentelor.

Este comod să notăm în cele ce urmează cu δx **modulul** erorii absolute și cu ε_x **modulul** erorii relative, adică

$$\delta x = |x_0 - x| \text{ sau } x_0 - x = \pm \delta x \text{ sau } x_0 = x \pm \delta x, \quad (15)$$

$$\varepsilon_x = \delta x : |x| \text{ sau } (x_0 - x) : x = \pm \varepsilon_x.$$

Vom presupune de asemenea că erorile sunt suficient de *mici*, adică

$$\delta x \ll |x|, \quad \varepsilon_x \ll 1, \quad (16)$$

astfel încât putem folosi formule pentru calcule **aproximative**.

2. Să calculăm întâi erorile *maxime* ale funcțiilor simple.

a) **Sumă**. Fie suma algebrică :

$$f = ax + by \text{ cu valoarea exactă } f_0 = ax_0 + by_0, \quad (17)$$

unde a, b sunt constante *exacte*. Eroarea absolută este

$$f_0 - f = a(x_0 - x) + b(y_0 - y) = \pm a\delta x \pm b\delta y.$$

Cazul *cel mai nefavorabil* are loc atunci când erorile absolute ale variabilelor x, y au același semn cu coeficienții respectivi a, b , de unde rezultă eroarea *maximă* :

$$\delta f = \delta(ax + by) = |a| \delta x + |b| \delta y; \quad \varepsilon_f = \delta f : |f|. \quad (18)$$

În particular, dacă $f = a \cdot x$, atunci $\delta f = |a| \cdot \delta x$; (18')
și cazul *diferenței*, pe care îl vom trata și separat :

$$f = x - y, \quad \delta f = \delta(x - y) = \delta x + \delta y. \quad (18'')$$

Observație. La adunarea mai multor numere, termenul cu număr minim de zecimale (deci cu eroarea absolută maximă) se lasă neschimbat, iar ceilalți termeni se *rotunjesc*, păstrând o zecimală în plus față de termenul grosolan (aceste zecimale vor da cifra "îndoielnică" a rezultatului).

b) **Diferență**. Asemănător sumei avem :

$$f = x - y, \quad f_0 = x_0 - y_0, \quad f_0 - f = (x_0 - x) - (y_0 - y) = \pm \delta x \mp \delta y.$$

Cazul *cel mai nefavorabil* are loc atunci când erorile absolute ale termenilor sunt de semne opuse și deci se adună, de unde eroarea *maximă* :

$$\delta f = \delta(x - y) = \delta x + \delta y, \quad \varepsilon_f = (\delta x + \delta y) : |x - y| . \quad (19)$$

Cazul diferenței este un caz particular al sumei algebrice de la punctul precedent (punând $a = 1$, $b = -1$).

Dacă x și y sunt apropiați între ei, eroarea *relativă maximă a diferenței* va fi foarte *mare* (din cauza *numitorului mic*!), chiar dacă erorile relative ale termenilor sunt mici. Acest fapt trebuie totdeauna avut în vedere, *evitând determinarea unei mărimi ca diferență a două mărimi apropiate*.

De exemplu, dacă creșterea de temperatură într-un vas calorimetric este *mică*, de la $t_1 = 19,3 \pm 0,1$ °C la $t_2 = 19,7 \pm 0,1$ °C, atunci eroarea *relativă a diferenței* $\Delta t = t_2 - t_1$ va fi :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\Delta t} &= (\delta t_1 + \delta t_2) : (t_2 - t_1) = 2 \delta t : (t_2 - t_1) = \\ &= 2 \cdot 0,1 : (19,7 - 19,3) = 0,5 = 50 \% , \end{aligned}$$

deși citirile t_1 , t_2 au fost făcute cu o precizie de 100 ori mai bună :

$$\varepsilon_t \approx 0,1 / 20 = 0,005 = 0,5 \% !$$

c) **Produs**. Pentru un produs de doi factori avem :

$$\begin{aligned} f &= x \cdot y, \quad f_0 - f = x_0 y_0 - xy = x(y_0 - y) + y(x_0 - x) + (x_0 - x)(y_0 - y) = \\ &= \pm x \delta y \pm y \delta x \pm \delta x \delta y \approx \pm x \delta y \pm y \delta x , \end{aligned}$$

unde am neglijat ultimul termen, erorile fiind presupuse *mici*.

Eroarea *maximă* (cazul *cel mai nefavorabil*) va fi:

$$\delta f = \delta(x y) = |x| \delta y + |y| \delta x; \quad \varepsilon_f = \delta f : |x y| = \varepsilon_x + \varepsilon_y , \quad (20)$$

deci *se adună erorile relative ale factorilor*.

d) **Cât**. Analog produsului avem :

$$\begin{aligned} f &= x / y, \quad f_0 - f = x_0 / y_0 - x / y = (y x_0 - x y_0) : (y y_0) = \\ &= [y(x_0 - x) - x(y_0 - y)] : (y y_0) = [\pm y \delta x \mp x \delta y] : [y(y \pm \delta y)] \approx \\ &= (\pm y \delta x \mp x \delta y) : y^2 , \end{aligned}$$

de unde eroarea *maximă* (cazul *cel mai nefavorabil*) :

$$\delta f = \delta(x / y) = [|y| \delta x + |x| \delta y] : y^2; \quad \varepsilon_f = \delta f : |f| = \varepsilon_x + \varepsilon_y , \quad (21)$$

deci și în acest caz *se adună erorile relative ale factorilor* (câtului).

Observație. Pentru ca o expresie de tip *produs-cât* să aibă sigur n cifre exacte trebuie ca factorii să aibă $n + 2$ cifre exacte.

e) **Putere**. Să considerăm o funcție *putere* $f = x^r$, unde r este un număr *real exact* (pentru funcția *radical* $r < 1$). Atunci

$$f_0 - f = x_0^r - x^r = (x \pm \delta x)^r - x^r = x^r(1 \pm \varepsilon_x)^r - x^r \approx \\ \approx x^r(1 \pm r \varepsilon_x) - x^r = \pm r x^r \varepsilon_x$$

(am folosit formula de aproximație (10)), de unde rezultă eroarea
 $\delta f = \delta x^r = r x^r \varepsilon_x$, $\varepsilon_f = \delta f : x^r = |r| \varepsilon_x$, (22)

adică eroarea relativă maximă a unei puteri este egală cu eroarea relativă a bazei înmulțită cu exponentul (în modul).

Pentru funcțiile simple de mai sus se calculează întâi eroarea absolută și apoi cu ajutorul acesteia eroarea relativă. Pentru funcții mai complicate de tip produs – cât – putere se calculează mai întâi eroarea relativă după regula de mai jos și apoi cu ajutorul acesteia eroarea absolută.

Regulă. Eroarea relativă maximă a unui produs-cât de factori la diferite puteri se obține adunând erorile relative ale factorilor, înmulțite cu exponenții respectivi (în modul).

Exemple. a) Diametrul necunoscut d_2 al unui tub capilar se determină pe baza diametrului cunoscut d_1 al unui tub capilar de referință și a ascensiunilor capilare h_1, h_2 : $d_2 = d_1 \cdot h_1 / h_2$, de unde eroarea relativă maximă este, conform regulii:

$$\varepsilon_{d_2} = \varepsilon_{d_1} + \varepsilon_{h_1} + \varepsilon_{h_2} \approx \varepsilon_{h_1} + \varepsilon_{h_2} = \delta h_1 / h_1 + \delta h_2 / h_2 = \\ = \delta h (1 / h_1 + 1 / h_2), \quad (\delta h_1 \approx \delta h_2),$$

unde am neglijat ε_{d_1} , diametrul d_1 al tubului etalon fiind cunoscut cu suficientă precizie.

2). Modulul de elasticitate al lui Young E se determină pe baza alungirii Δl a unui fir de lungime l_0 și secțiune S_0 , supus forței de întindere F : $E = F l_0 : (S_0 \Delta l)$, de unde eroarea relativă maximă:

$\varepsilon_E = \varepsilon_F + \varepsilon_{l_0} + \varepsilon_{S_0} + \varepsilon_{\Delta l} \approx \varepsilon_{\Delta l} = \delta(l - l_0) : (l - l_0) = 2\delta l : (l - l_0)$, unde erorile relative a forței F (dată de greutatea marcate), a lungimii l_0 și a secțiunii date S_0 pot fi neglijate (nu însă $\delta l_0 \approx \delta l$ din expresia lui $\varepsilon_{\Delta l}$).

3). Perioada pendulului simplu gravitațional T este dată de formula: $T = 2\pi\sqrt{l/g} = 2\pi l^{1/2} g^{-1/2}$, de unde eroarea relativă maximă: $\varepsilon_T = \varepsilon_\pi + (1/2) \varepsilon_l + (1/2) \varepsilon_g \approx (1/2) \varepsilon_l$, unde erorile pentru π , g se pot neglija dacă luăm un număr suficient de zecimale.

4) Constanta elastică k a unui resort se determină fie static pe baza alungirii x sub acțiunea greutății mg , fie dinamic pe baza perioadei T a oscilațiilor verticale ale unei greutăți :

$$k = mg / x \text{ sau } k = 4\pi^2 m / T^2 ,$$

de unde eroarea relativă maximă :

$$\varepsilon_k = \varepsilon_m + \varepsilon_g + \varepsilon_x \approx \varepsilon_x \text{ sau } \varepsilon_k = 2\varepsilon_\pi + \varepsilon_m + 2\varepsilon_T \approx 2\varepsilon_T ,$$

unde se pot neglija erorile masei marcate m , a lui g și π (luând un număr suficient de zecimale).

5) Perioada bătăilor T la pendule cuplate se calculează cu ajutorul perioadelor proprii T_1, T_2 : $T_b = T_1 T_2 : (T_1 - T_2)$,

de unde eroarea maximă :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{T_b} &= \varepsilon_{T_1} + \varepsilon_{T_2} + \varepsilon_{(T_1 - T_2)} = \varepsilon_{T_1} + \varepsilon_{T_2} + \delta(T_1 - T_2) : |T_1 - T_2| = \\ &= \varepsilon_{T_1} + \varepsilon_{T_2} + (\delta T_1 + \delta T_2) : |T_1 - T_2| \approx 2\delta T : |T_1 - T_2| , \end{aligned}$$

eroarea de determinare a perioadelor fiind practic aceeași. Deoarece T_1 și T_2 sunt apropiate între ele, ultimul termen dă o eroare mare.

6) Densitatea liniară ρ_ℓ a unei coarde vibrante de lungime ℓ , întinsă de o forță F este : $\rho_\ell = F : (4 \ell^2 v^2)$,

de unde eroarea relativă maximă :

$$\varepsilon_{\rho_\ell} = \varepsilon_F + 2 \varepsilon_\ell + 2 \varepsilon_v \approx \varepsilon_F + 2 \varepsilon_\ell ,$$

unde am neglijat eroarea frecvenței v de vibrație a coardei .

3. În cazul unor funcții *oarecare*, de exemplu, al funcțiilor trigonometrice, logaritmice, exponențiale etc., se aplică calculul *diferențial*, asimilând diferențialele cu erori, presupuse *mici*.

Presupunem că funcția este continuă și cu derivate parțiale continue în domeniul considerat.

Fie o funcție de două variabile $f = f(x, y)$, valoarea exactă fiind $f_0 = f(x_0, y_0)$. Se dezvoltă funcția în serie tayloriană în jurul valorilor (x, y) păstrând doar termenii liniari :

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) &\approx f(x, y) + (x_0 - x) \frac{\partial f}{\partial x} + (y_0 - y) \frac{\partial f}{\partial y} , \\ f_0 - f &\approx \pm \delta x \frac{\partial f}{\partial x} \pm \delta y \frac{\partial f}{\partial y} . \end{aligned}$$

Cazul *cel mai nefavorabil* are loc atunci când erorile argumentelor au același semn cu derivatele parțiale respective, de unde eroarea maximă :

$$\delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \delta y .$$

Putem raționa și altfel. Anume, diferențiem funcția :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz ,$$

asimilăm diferențialele cu erori (considerate *mici*): $dx \rightarrow \delta x$,... și luăm cazul *cel mai nefavorabil* pentru a obține eroarea *maximă* :

$$\delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \delta y + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \delta z . \quad (23)$$

Putem obține și pe această cale formulele pentru funcțiile simple:

$$f = ax + by , \quad df = adx + bdy \rightarrow \delta f = |a| \delta x + |b| \delta y ;$$

$$f = x - y , \quad df = dx - dy \rightarrow \delta f = \delta x + \delta y ;$$

$$f = x \cdot y , \quad df = x dy + y dx \rightarrow \delta f = |x| \delta y + |y| \delta x ;$$

$$f = x / y , \quad df = (y dx - x dy) : y^2 \rightarrow \delta f = (|y| \delta x + |x| \delta y) : y^2 .$$

Pentru expresii de tip produs – cât – putere se calculează întâi eroarea *relativă*. Pentru aceasta este comod să logaritmăm în prealabil funcția și apoi să diferențiem (derivata “*logaritmică*”) (știind că $d \ln x = dx / x$) :

$$f = x y z , \quad \ln f = \ln x + \ln y + \ln z , \quad df / f = dx / x + dy / y + dz / z \rightarrow \\ \rightarrow \delta f / |f| = \delta x / |x| + \delta y / |y| + \delta z / |z| , \quad \varepsilon_f = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z ;$$

$$f = x / (y z) , \quad \ln f = \ln x - \ln y - \ln z , \quad df / f = dx / x - dy / y - dz / z \rightarrow \\ \rightarrow \delta f / |f| = \delta x / |x| + \delta y / |y| + \delta z / |z| , \quad \varepsilon_f = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z ;$$

$$f = x^r , \quad \ln f = r \ln x , \quad df / f = r dx / x \rightarrow \delta f / |f| = r \delta x / |x| , \quad \varepsilon_f = |r| \varepsilon_x .$$

Se regăsește astfel *regula de adunare a erorilor relative pentru expresii de tip produs-cât*.

Exemple. 1) Ascensiunea capilară h este dată de formula (*Jurin*) : $h = (2\sigma \cos \vartheta) : (\rho g r)$, unde ϑ este unghiul de *racordare (umecțajie)*. Eroarea relativă maximă este

$$\varepsilon_h = \varepsilon_\sigma + \varepsilon_{\cos \vartheta} + \varepsilon_\rho + \varepsilon_g + \varepsilon_r , \quad \text{unde}$$

$$\varepsilon_{\cos \vartheta} = (\delta \cos \vartheta) : |\cos \vartheta| = (|\sin \vartheta| \cdot \delta \vartheta) : |\cos \vartheta| = |\tan \vartheta| \cdot \delta \vartheta .$$

2) Nivelul sonor L (în decibeli) este definit prin intensitățile sonore I_0 (pragul auditiv inferior la 1000 Hz) și I astfel: $L = 10 \lg(I / I_0)$, de

$$\text{unde eroarea maximă:} \quad \delta L = 10 \delta(\lg I - \lg I_0) = \\ = 10 (\delta I / I + \delta I_0 / I_0) \cong 10 \delta I (1 / I + 1 / I_0) , \quad (\delta I \cong \delta I_0) .$$

7. RECOMANDĂRI PRACTICE

Pentru a ușura munca de calcul și a evita greșeli trebuie respectate câteva reguli practice.

1. Precizia calculelor trebuie să corespundă preciziei datelor inițiale, adică preciziei măsurărilor efectuate. **Precizia rezultatului final al calculelor nu poate fi mai mare decât precizia datelor inițiale**, adică eroarea relativă a rezultatului trebuie să corespundă erorilor relative ale datelor inițiale. De aceea :

a) Trebuie evaluată precizia datelor inițiale (erorilor lor relative). Altfel, fie că nu păstrăm un număr suficient de cifre semnificative și stricăm precizia rezultatului, fie că păstrăm inutil multe cifre care cresc vertiginos (prin înmulțiri, împărțiri, extrageri de rădăcină etc.), îngreunăm calculele, ceea ce duce la greșeli. **Importă numărul cifrelor semnificative, nu al zecimalelor, adică nu poziția virgulei !**

b) Trebuie evaluată eroarea relativă a rezultatului pe baza erorilor relative ale datelor inițiale, chiar înainte de a face calculul rezultatului propriu-zis.

c) Eroarea rezultatului final este determinată în esență de eroarea relativă a mărimii celei mai *neprecise*.

d) În rezultatul final trebuie să păstrăm atâtea zecimale câte zecimale are eroarea absolută.

e) Trebuie evaluată eroarea relativă a fiecărui rezultat parțial (intermediar). În toate rezultatele intermediare se păstrează una sau cel mult două cifre semnificative *în plus* față de numărul cifrelor semnificative ale rezultatului final. Această cifră în plus se va elimina prin rotunjire abia în rezultatul final.

Trebuie folosite: tabele de logaritmi, metode grafice și grafo-analitice, formule de aproximație etc. pentru a ușura cât mai mult munca de calcul. Metodele grafice de calcul dau o precizie de circa 0,3 %, iar tabelele de logaritmi cu 4 zecimale dau o precizie de 0,03 %. În laboratoarele obișnuite pentru elevi sau studenți chiar o precizie de numai 1 % este de cele mai multe ori suficientă.

Trebuie efectuat un control continuu al calculelor pentru a evita greșeli și omisiuni. Fiecare operație trebuie verificată imediat prin operația inversă și abia după aceea se poate trece la operația următoare. De asemenea, se recomandă efectuarea calculelor de două ori, cu mijloace diferite, sau de către două persoane în mod independent, comparând apoi rezultatele.

2. În ceea ce privește *calculul erorilor* trebuie subliniate următoarele. *Toate erorile se dau și se calculează cu una sau cel mult două cifre semnificative.* De aceea, valorile tuturor mărimilor care intervin în calculul erorii trebuie *rotunjite*, astfel încât să rămână circa *două* cifre semnificative. Eroarea finală se va rotunji la o *singură* cifră semnificativă.

3. Forma de prezentare a calculelor trebuie să fie îngrijită. Nu trebuie folosite foi volante sau fițuici umplute de-a lungul și de-a latul cu calcule și ștersături. *Calcululele trebuie făcute într-un caiet de laborator*, în succesiune logică, pentru a putea fi oricând verificate. *Nu se șterg datele sau cifrele cu gumă*, ci se scriu încă odată sau se taie ușor și se scriu deasupra sau dedesubt noile cifre. Dacă trebuie refăcute toate calculele, este bine să le facem complet și ordonat pe o pagină nouă.

4. În încheiere dăm un *exemplu*. Fie măsurarea perioadei T a pendulului simplu gravitațional :

$$T = 2\pi\sqrt{\ell/g} , \quad \ell = 42,3 \pm 0,1 \text{ cm} , \quad g = 981 \pm 1 \text{ cm/s}^2 .$$

Eroarea relativă maximă a perioadei este, conform regulii cunoscute, $\varepsilon_T = \varepsilon_\pi + (1/2) \varepsilon_\ell + (1/2) \varepsilon_g$. Să evaluăm eroarea lui ℓ și g :

$$\varepsilon_\ell = \delta \ell / \ell = 0,1 / 42,3 = 0,24 \% ; \quad \varepsilon_g = 1 / 981 = 0,10 \% .$$

Prin urmare eroarea asupra lui π trebuie să fie de acest ordin. Luăm π cu două zecimale : $\varepsilon_\pi = 0,01 / 3,14 = 0,32 \%$. Eroarea asupra rezultatului final :

$$\varepsilon_T = \varepsilon_\pi + (1/2) \varepsilon_\ell + (1/2) \varepsilon_g = 0,32 + 0,12 + 0,05 \% \cong 0,5 \% ;$$

$$\delta T = T \varepsilon_T = 1,30 \cdot 0,005 \approx 0,007 \text{ s} ,$$

deci trebuie să-l luăm pe T cu *trei* zecimale (câte are eroarea sa absolută). Rezultatul final se scrie astfel :

$$T = 1,304 \pm 0,007 \text{ s} .$$

Pe lângă eroarea calculată mai sus, trebuie considerată și o eroare de metodă, datorită aproximației $\sin \alpha \approx \alpha$, folosite în deducerea formulei perioadei. Pentru amplitudini unghiulare de oscilație sub 8° această eroare este sub $0,1 \%$.

* * *

TRASAREA GRAFICELOR

În alcătuirea și trasarea graficelor trebuie respectate anumite reguli.

1. Tabelul de valori. În primul rând alcătuim tabelul cu valorile argumentului x (în ordine crescătoare) și valorile corespunzătoare ale funcției $y = f(x)$, ca de exemplu, în tabelul alăturat:

x , un. măs.	51	59	68	79	92	104	118	128	142	156	168
y , un. măs.	1,17	1,21	1,26	1,29	1,33	1,37	1,39	1,40	1,42	1,43	1,45

La începutul rândului, lângă simbolul mărimii, trebuie scrisă *neapărat* unitatea de măsură respectivă, fie în paranteze drepte, fie despărțită printr-o virgulă de simbolul mărimii.

2. Domeniul de variație. Stabilim domeniul de variație a celor două mărimi x și y , prin rotunjirea valorilor extreme până la valori convenabile care să încadreze bine valorile din tabel. În exemplul nostru : $x \in (50, 170)$, deci $\Delta x = 120$ și $y \in (1,00; 1,50)$, deci $\Delta y = 0,50$.

3. Dimensiunile graficului. Dimensiunile graficului trebuie să fie de ordinul 12 cm \times 18 cm (dublul unei cărți poștale sau jumătate dintr-o coală oficială obișnuită, deci format A5). În cazuri speciale graficul poate fi mai mic, de ordinul 9 cm \times 12 cm (adică o carte poștală, dar în nici un caz mai mic) sau poate fi mai mare, de ordinul 18 cm \times 24 cm. Raportul *optim* dintre lungime și lățime este $\sqrt{2} = 1,4$. Graficul poate fi așezat în una din cele două poziții din fig.1 ("peisaj", respectiv "portret"), în funcție de comoditatea scărilor pentru x și y .

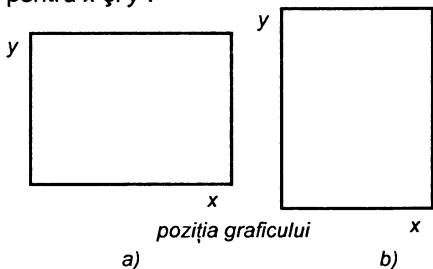


Fig.1

4. Scările. Graficul poate fi trasat comod pe hârtie milimetrică sau eventual pe hârtie în pătrățele de aritmetică (sau "comercială"). Poate fi folosită și o hârtie albă, liniată de noi ușor cu creionul cu linii *echidistante* verticale și orizontale. Distanța dintre două linii consecutive, verticale sau orizontale, trebuie să reprezinte un număr de unități egal *neapărat* cu unul din divizorii lui 10, adică 1, 2 sau 5, înmulțit cu o putere întreagă convenabilă a lui 10, deci $1 \cdot 10^k$ sau $2 \cdot 10^k$ sau $5 \cdot 10^k$ unități, unde k este un număr *întreg* convenabil (pozitiv, negativ sau nul).

Astfel, intervalul dintre liniile echidistante, verticale sau orizontale, poate fi din 0,1 în 0,1 unități sau din 0,2 în 0,2 unități sau din 0,5 în 0,5 unități, asta pentru $k = -1$. Pentru $k = 0$ intervalul va fi: din 1 în 1 sau din 2 în 2 sau din 5 în 5 unități. Pentru $k = 1$ intervalul va fi: din 10 în 10 sau din 20 în 20 sau din 50 în 50 unități. Pentru $k = 2$ intervalul va fi: din 100 în 100 sau din 200 în 200 sau din 500 în 500 unități.

Nu se recomandă folosirea intervalelor sub 0,1 sau peste 500 unități, deoarece le putem evita folosind submultiplii sau multiplii ai unităților folosite.

Distanța dintre două linii consecutive trebuie să fie de ordinul a 10 ... 20 mm. Liniile nu trebuie să fie nici prea dese, deoarece încarcă desenul și nici prea rare, deoarece strică precizia de reprezentare a datelor.

În cazul hârtiei milimetrice sau în pătrățele (de aritmetică sau "comercială") nu se trasează liniile echidistante (deoarece sunt gata trasate de fabrică), ci se marchează pe cele două axe doar intervalele echidistante alese. Distanța dintre aceste marcaje trebuie să cuprindă 1, 2 sau 5 cm, respectiv 2, 4 sau 10 pătrățele de aritmetică.

În cazul exemplului nostru $\Delta x = 120$ sau mai bine 140 unități. Dacă folosim hârtie milimetrică (sau în pătrățele) vom alege $\Delta x = 140$ repartizat pe 14 cm lungime (în cazul hârtiei albe liniate de noi putem alege și $\Delta x = 130$ repartizat pe cca 14...16 cm). Pe axa verticală avem $\Delta y = 0,50$ unități pe care îi repartizăm pe 10 cm înălțime (fig.1 a) sau pe 15 cm înălțime (fig.1 b).

5. Trasarea graficului. Fiecare punct experimental se marchează vizibil printr-un cerculeț, pătrățel, triunghi, cruciuliță etc. de 1 mm mărime, *fără* a duce linii *ajutătoare* (pline sau punctate), ci urmărind paralel liniile de coordonate deja trasate, și *fără* a nota pe axe valorile numerice ale coordonatelor punctului. Numai punctele

remarcabile (critice) pot fi evidențiate prin linii de coordonate (întrerupte) proprii și pot fi înscrise pe axe valorile coordonatelor respective.

Punctele experimentale reprezentate *nu trebuie* unite prin linii drepte, astfel încât graficul să iasă o linie *frântă*. Trebuie trasată o curbă **lină** (eventual cu ajutorul unui florar) prin **interpolare**, astfel încât *curba să treacă prin cât mai multe puncte experimentale, lăsând eventual de o parte și de alta, în mod cât mai egal și simetric, un număr cât mai mic de puncte și cât mai apropiate de curbă.*

Forma curbei pe care o vom trasa depinde de cunoștințele noastre asupra desfășurării fenomenului (procesului) studiat. Astfel, dacă avem argumente temeinice în sprijinul unei dependențe **liniare**, vom trasa prin interpolare o linie **dreaptă** (fig.2, linia plină). Dacă știm că dependența este parabolică, vom interpola cât mai bine o curbă parabolică (fig.2, linia întreruptă). Dar se recomandă să se prelucreze expresia convenabil și să se aleagă variabilele convenabil, astfel încât relația de reprezentat să devină **liniară** (**liniarizarea** expresiei de reprezentat), deci foarte ușor de interpolat și de extrapolat (cu erori mici).

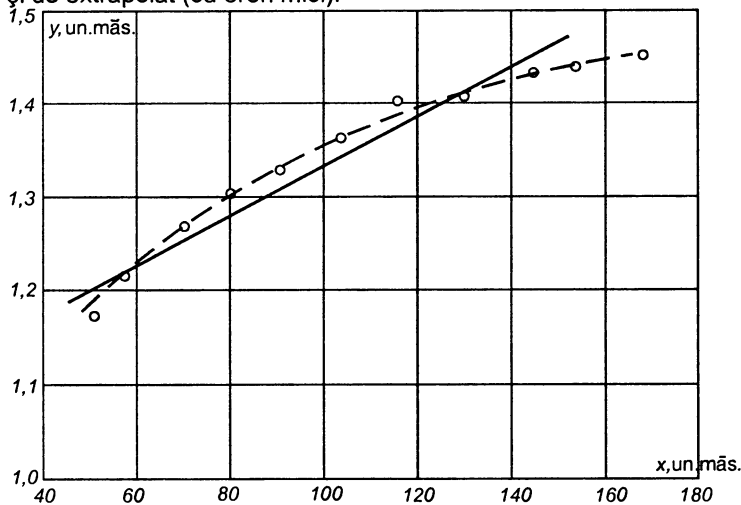
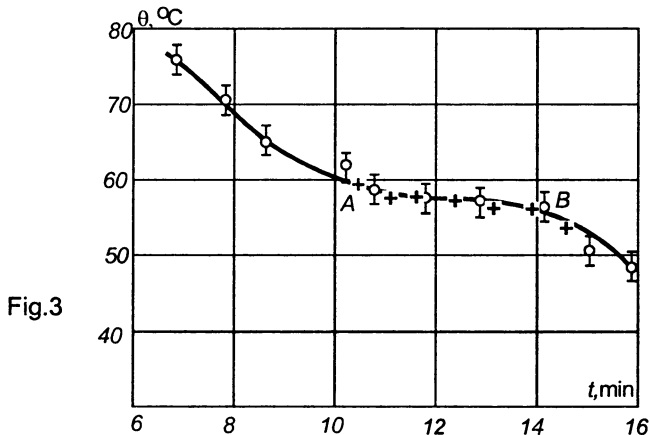


Fig.2

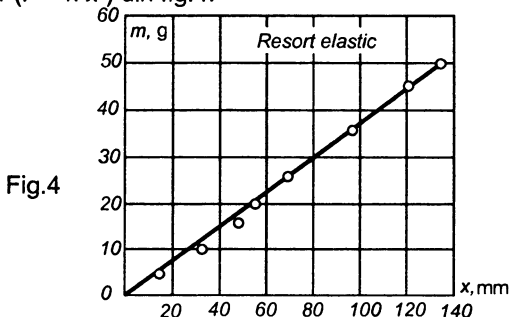
Dacă studiem un fenomen nou și nu știm deloc la ce tip de curbă ne putem aștepta, atunci trebuie să evaluăm bine erorile funcției y pentru fiecare punct experimental, pentru a vedea câtă

Încredere putem avea în punctele experimentale obținute. Pentru aceasta marcăm intervalele $(y - \delta y, y + \delta y)$ (δy = eroarea absolută) prin segmente verticale centrate pe punctele experimentale respective (x, y) și facem interpolarea printr-o curbă *lină* care să taie aceste segmente. De exemplu, în cazul graficului din fig.3 se evidențiază experimental existența unui anumit proces (de cristalizare) în regiunea palierului AB. Uneori se reiau măsurătorile în mod special în regiunea interesantă pentru a obține mai multe (mai dese) puncte experimentale și a evita o eventuală pierdere (estompare) a unor variații (fig.3, crucele).



Sub cadrul graficului sau sus în cuprinsul cadrului se scrie titlul graficului.

6. Exemple. a) *Resort elastic.* Forța elastică (egală cu greutatea atârnată) în funcție de alungirea resortului ne conduce la graficul liniar ($F = k x$) din fig.4.



m, g	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
x, mm	15	30,5	45	55	68,5	82	97,5	106	120	135

Constanta elastică se determină din grafic alegând **pe dreapta de interpolare** două puncte cât mai depărtate între ele spre marginile graficului, de exemplu : (0, 0) și (135, 50). Atunci

$$k = F / x = 50 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8 \text{ N} : (135 \cdot 10^{-3} \text{ m}) = 3,63 \text{ N/m} .$$

b) **Rezonanța mecanică**. Amplitudinea oscilațiilor forțate în funcție de frecvență ne conduce la curba din fig.5.

$\omega, \text{ rad/s}$	96,0	81,6	75,9	68,3	66,2	56,6	48,1
B, mm	1,5	2,5	4,0	4,5	6,0	6,5	7,0

44,5	39,8	30,8	28,3	26,2	20,9
7,5	10	12	21	14	10

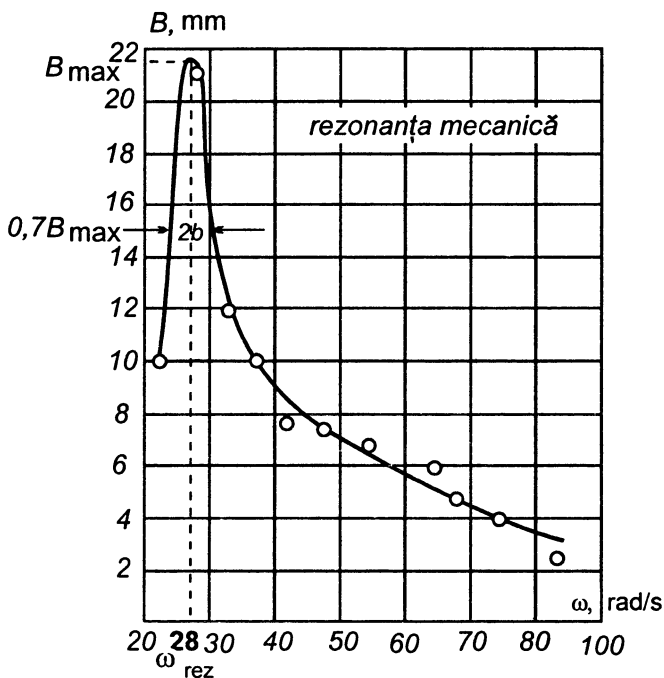


Fig.5

Se vede că tocmai în regiunea *rezonanței* avem prea puține puncte experimentale, de aceea ar trebui reluate determinările experimentale în această regiune pentru a preciza cât mai bine forma curbei.

Din grafic rezultă frecvența de rezonanță $\omega_{rez} \approx 28 \text{ rad/s}$.

Amplitudinea oscilațiilor forțate este

$$B = \frac{F_0}{\sqrt{r^2\omega^2 + (m\omega^2 - k)^2}} = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4b^2\omega^2}}.$$

În cazul amortizărilor mici, când *factorul de amortizare*

$b \ll \omega_0$, avem $\omega_{rez} \approx \omega_0 = \sqrt{k/m}$. Atunci în vecinătatea rezonanței, anume pentru $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$, avem aproximativ $\omega + \omega_0 \approx 2\omega_0$, $\omega \approx \omega_0$ și deci

$$B \approx \frac{F_0}{m\sqrt{4\omega_0^2(\omega - \omega_0)^2 + 4b^2\omega_0^2}} = \frac{F_0}{2k\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + b^2}}.$$

Amplitudinea începe să scadă sensibil când $|\omega - \omega_0| \approx b$.

Anume, atunci când $|\omega - \omega_0| = b$, adică pentru frecvențele $\omega_1 = \omega_0 - b$ și $\omega_2 = \omega_0 + b$, amplitudinea B devine $B_{max} / \sqrt{2} = 0,7 B_{max}$.

Invers, citim pe curbă amplitudinea maximă B_{max} , calculăm $0,7 B_{max}$, trasăm o linie orizontală în dreptul acestei valori a ordonatei, care taie curba în două puncte. Citim abscisele $\omega_{1,2}$ ale acestor puncte. Diferența $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ trebuie să fie chiar $2b$:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2b, \quad b = (1/2) \Delta\omega = (1/2) (\omega_2 - \omega_1).$$

Observăm că peste tot aici ω este *frecvența unghiulară*: $\omega = 2\pi\nu$. De asemenea, expresia de mai sus a *factorului de amortizare* este valabilă numai pentru rezonanțe "ascuțite" când $b \ll \omega_0$.

În general, pentru o curbă de tipul curbei de *rezonanță*, care reprezintă intensitatea unei mărimi în funcție de frecvență unghiulară, se introduce noțiunea de *lărgime a curbei*, egală cu lărgimea $\Delta x = x_2 - x_1$ a curbei în dreptul ordonatei $0,7 y_{max}$. Dacă se reprezintă o mărime *energetică*, care este deci *pătratică* în amplitudine, atunci lărgimea curbei se ia evident în dreptul ordonatei $0,5 y_{max}$.

În exemplul nostru : $B_{\max} = 21,8 \text{ mm}$, $0,7 B_{\max} = 15,3 \text{ mm}$,
 $\omega_1 \cong 27 \text{ rad/s}$, $\omega_2 \cong 29 \text{ rad/s}$, deci lărgimea curbei de rezonanță
 $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2 \text{ rad/s}$ și deci **factorul de amortizare** b este egal cu
 semilărgimea curbei de rezonanță : $b = (1/2) \Delta\omega = 1,0 \text{ s}^{-1}$.

c) **Termometrul cu rezistență**. Rezistența în funcție de temperatură ne conduce la graficul din fig.6.

R, Ω	108	109	120	122	132	136	142	146	154	158
$t, ^\circ\text{C}$	22	25	50	58	83	90	104	118	139	150

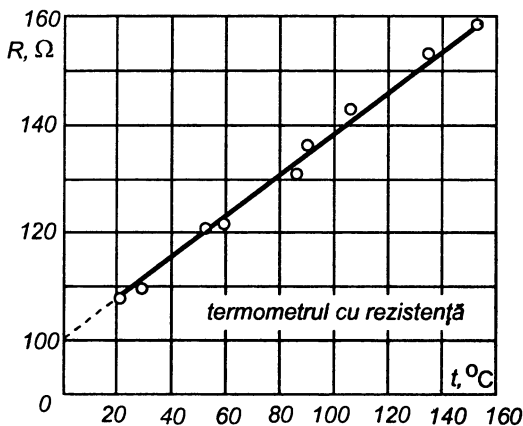


Fig.6

Interpolând o dreaptă, $R = R_0(1 + At)$, și extrapolând-o spre 0°C găsim $R_0 = 100 \Omega$. Pentru determinarea pantei m luăm de exemplu, punctele $(0, 100)$ și $(150, 158)$:

$$m = R_0 A = (158 - 100) : 150 = 0,387 \Omega/\text{grad} ,$$

de unde coeficientul termic al rezistivității :

$$A = m / R_0 = 0,387 / 100 = 3,87 \cdot 10^{-3} \text{ grad}^{-1} .$$

d) **Termistorul**. Termistorul este un *semiconductor* a cărui rezistență scade cu temperatura după o lege de tip exponențial :

$$R = A e^{\varepsilon / (kT)} , \quad k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} - \text{constanta Boltzmann} ,$$

unde ε este lărgimea benzii interzise în cazul conductibilității intrinseci (fără impurități sau la temperaturi suficient de înalte).

Logaritmând relația precedentă și exprimând pe ε în electron-volți ($1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$) , avem

$$\lg R = \lg A + [\varepsilon / (2kT)] \lg e = \lg A + 0,4343 \cdot \varepsilon \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} : \\ : (2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} T) = \lg A + 2,5 \varepsilon \cdot 1000 / T, \quad (\varepsilon \text{ în eV}).$$

Prin urmare graficul lui $\lg R$ în funcție de $1000 / T$ trebuie să fie o linie dreaptă cu panta $m = 2,5 \varepsilon$, din care putem afla pe ε , anume $\varepsilon = 0,4 m$. (Acesta este un exemplu de "liniarizare" de care am vorbit mai înainte.)

În fig.7 am reprezentat $R = f(t)$ și $\lg R = f(1000 / T)$, conform datelor experimentale din tabelul alăturat :

R, Ω	71,4	66,5	25,0	20,4	10,8	7,2	5,6	4,3	3,0	2,2
$\lg R$	1,854	1,823	1,398	1,310	1,034	0,858	0,748	0,634	0,477	0,342
$t, ^\circ\text{C}$	22	25	50	59	83	92	104	118	139	148
$1000/T$	3,38	3,35	3,09	3,01	2,81	2,74	2,65	2,55	2,42	2,37

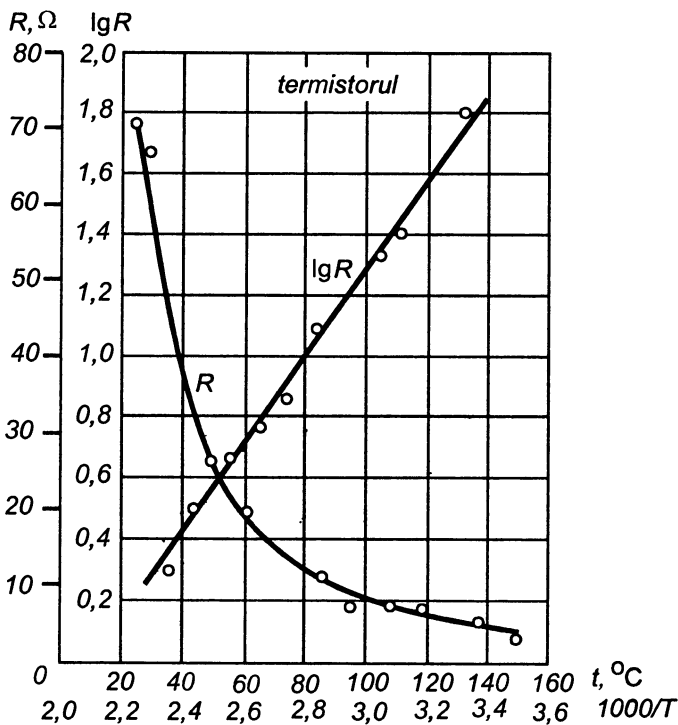


Fig.7

Din graficul $\lg R = f(1000 / T)$, luând de exemplu pe **dreapta de interpolare** punctele (2,35 ; 0,35) și (3,35 ; 1,80) , găsim *panta*

$$m = (1,80 - 0,35) : (3,35 - 2,35) = 1,45 = 2,5 \varepsilon ,$$

de unde intervalul **energetic** $\varepsilon = 0,4 m = 0,58 \text{ eV} .$

R, Ω

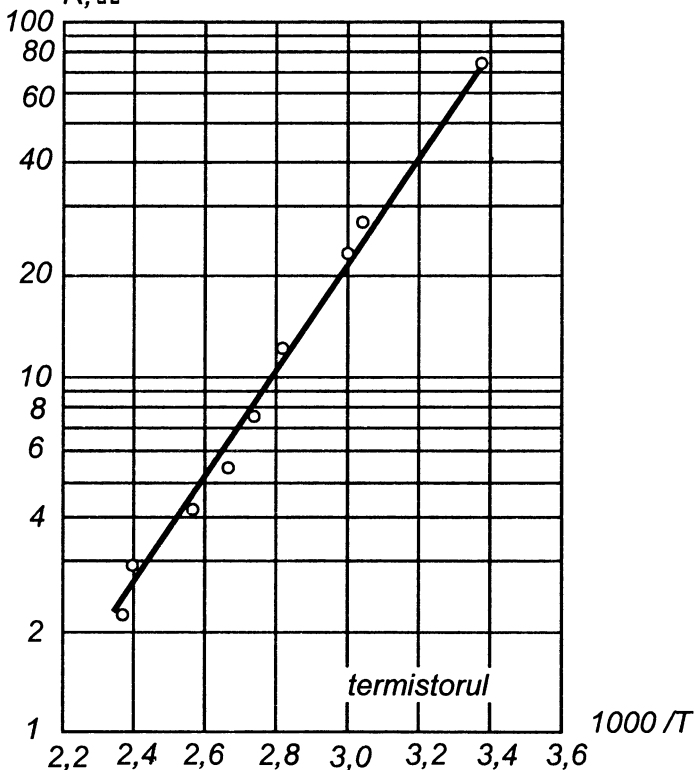


Fig.8

Există hârtie milimetrică liniată în scară *logaritmică*, simplă (o axă) sau dublă (ambele axe). Putem linia noi înșine o astfel de scară, copiind scările logaritmice de pe o *riglă de calcul*. De exemplu, rezistența termistorului de mai sus în funcție de $1000 / T$ este reprezentată direct în scara semilogaritmică din fig.8, fără a mai fi nevoie să calculăm logaritmi.

ANEXE

1. Formule de aproximație

$$(1+x)(1+y)(1+z)\dots \approx 1+x+y+z+\dots \quad (1)$$

dacă $|x| \ll 1$, $|y| \ll 1$, $|z| \ll 1$, ...,

formula se obține desfășcând parantezele și neglijând termenii de grad superior, care sunt *mici* față de cei *liniari* (de gradul 1).

$$\frac{1}{1 \pm x} = \frac{1 \mp x}{1 - x^2} \approx 1 \mp x, \text{ dacă } |x| \ll 1; \quad (2)$$

$$\frac{1}{a \pm b} = \frac{1}{a(1 \pm b/a)} \approx \frac{1}{a} \left(1 \mp \frac{b}{a} \right), \text{ dacă } |b| \ll |a|, \text{ adică } |b/a| \ll 1; \quad (3)$$

$$\sqrt{1 \pm x} \approx \sqrt{1 \pm x + x^2/4} = \sqrt{(1 \pm x/2)^2} = 1 \pm x/2, \text{ dacă } |x| \ll 1; \quad (4)$$

$$\sqrt{a \pm b} = \sqrt{a(1 \pm b/a)} \approx \sqrt{a} \left(1 \pm \frac{b}{2a} \right) = \sqrt{a} \pm \frac{b}{2\sqrt{a}}, \text{ dacă } |b| \ll a > 0. \quad (5)$$

$$\frac{(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\dots}{(1+y_1)(1+y_2)(1+y_3)\dots} \approx 1+x_1+x_2+x_3+\dots-y_1-y_2-y_3-\dots, \quad (6)$$

dacă $|x_i| \ll 1$, $|y_i| \ll 1$, $i = 1, 2, 3, \dots$

Mai general :

$$(1+x)^r \approx 1+rx+(1/2)r(r-1)x^2 \approx 1+rx, \text{ dacă } |x| \ll 1, \quad (7)$$

unde $r \in \mathbf{R}$ este de ordinul unităților . De exemplu,

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = (1 \pm x)^{-1/2} \approx 1 \mp x/2, \text{ dacă } |x| \ll 1, \text{ (aici } r = -1/2). \quad (8)$$

Pentru alte funcții :

$$\sin x \approx x - x^3/6 \approx x; \quad \cos x \approx 1 - x^2/2 \approx 1; \quad \operatorname{tg} x \approx x + x^3/3 \approx x, \quad (9)$$

unde x este în *radiani* și $|x| \ll 1$ rad , adică $x < 6^\circ$,

$$1 \text{ rad} = 360^\circ / (2\pi) = 180^\circ / \pi = 57^\circ 17' 44'',8 \approx 57^\circ . \quad (10)$$

$$e^x \approx 1 + x + x^2/2 \approx 1 + x , \text{ dac\u0103 } |x| \ll 1 , \quad (11)$$

$$a^x = e^{x \ln a} \approx 1 + x \ln a , \text{ dac\u0103 } |x \ln a| \ll 1 , \quad (12)$$

$$\ln(1+x) \approx x - x^2/2 \approx x , \text{ dac\u0103 } |x| \ll 1 . \quad (13)$$

2. C\u0103teva unit\u0103\u021bi de m\u0103sur\u0103 \u0219i constante fizice

Litrul cu simbolul L este definit ast\u0103zi ca fiind identic cu 1 dm³.

Torrul sau mm Hg este presiunea exercitat\u0103 de o coloan\u0103 de mercur \u00eenalt\u0103 de 1 mm la *temperatura* de 0°C \u0219i \u00een c\u00e2mpul gravita\u021bional *normal* $g_n = 9,80665 \text{ m/s}^2$:

$$\begin{aligned} 1 \text{ torr} &= 1 \text{ mm Hg} = [\rho gh] = \\ &= 13595,1 \text{ (kg/m}^3) \cdot 9,80665 \text{ (m/s}^2) \cdot 10^{-3} \text{ m} = \\ &= 133,322 \text{ Pa} \cong 133,3 \text{ Pa} \cong (400/3) \text{ Pa} . \end{aligned} \quad (1)$$

Densitatea mercurului :

$$\text{la } 0^\circ\text{C} : 13595,1 \text{ kg/m}^3 \text{ \u0219i la } 20^\circ\text{C} : 13545,9 \text{ kg/m}^3 . \quad (2)$$

Atmosfera fizic\u0103 :

$$1 \text{ atm} = 760 \text{ torr} = 101325 \text{ Pa} \cong 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 101,3 \text{ kPa} . \quad (3)$$

Milimetrul coloan\u0103 de ap\u0103 :

$$1 \text{ mm H}_2\text{O} \cong 9,8 \text{ Pa} \cong 13,6 \text{ torr} , \quad 1 \text{ atm} = 10,33 \text{ m H}_2\text{O} . \quad (4)$$

Caloria interna\u021bional\u0103 :

$$1 \text{ cal}_{IT} = (1/860) \text{ Wh} = 4,1868 \text{ J} ; \quad 1 \text{ J} \cong 0,24 \text{ cal} . \quad (5)$$

Kelvinul, unitate de temperatur\u0103 *termodinamic\u0103*, este frac\u021biunea $1/273,16$ din temperatura termodinamic\u0103 a punctului *triplu* al apei. **Rela\u021bia dintre sc\u0103rile Kelvin \u0219i Celsius** :

$$T [\text{K}] = 273,15 + t [^\circ\text{C}] = T_0 + t = 1/\alpha + t , \quad (6)$$

$$\text{unde } \alpha = 1/273,15 \text{ K}^{-1} = 0,003661 \text{ K}^{-1} \quad (7)$$

este *coeficientul de dilatare izobar\u0103* a gazului perfect (sau coeficientul termic al presiunii gazului perfect).

Unitatea atomic\u0103 de mas\u0103:

$$\begin{aligned} 1 \text{ u} &= (1/12) \text{ masa atomului } ^{12}\text{C}_6 = 1,6605402 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = \\ &= 931,4943 \text{ MeV} = 1,4924191 \cdot 10^{-10} \text{ J} , \end{aligned} \quad (8)$$

$$1 \text{ u} \cong 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cong 931,5 \text{ MeV} \cong 1,49 \cdot 10^{-10} \text{ J} . \quad (9)$$

$$1 \text{ u} = 10^{-3} / N_A , \text{ unde } N_A = 6,0221367 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \quad (10)$$

este *constanta (num\u0103rul) lui Avogadro*.

Molul este cantitatea de substanță (materie) a unui sistem care conține atâtea entități elementare câți atomi există în 12 g de carbon 12 . Entitățile elementare pot fi atomi, molecule, ioni, electroni, alte particule sau grupuri specificate de asemenea particule.

A nu se confunda molul cu kilogramul : cu kilogramul măsurăm masa, iar cu molul măsurăm cantitatea de substanță . În SI molul și nu kilomolul este unitate pentru cantitatea de substanță.

Masa molară μ [kg/mol] și masa moleculară M [u] sunt legate prin relația

$$\mu \text{ [kg/mol]} = 10^{-3} M \text{ [u]} . \quad (11)$$

Constanta lui Boltzmann :

$$k = 1,380658 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \cong 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} . \quad (12)$$

Constanta lui Avogadro :

$$N_A = 10^{-3} / u_{[\text{kg}]} = 6,0221367 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \cong 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} . \quad (13)$$

Constanta universală a gazelor :

$$R = kN_A = 8,314510 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)} \cong 8,3 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)} . \quad (14)$$

Condiții normale ale gazelor înseamnă :

temperatură normală : $T_0 = 273,15 \text{ K} = 0,00^\circ\text{C}$;

presiune normală : $p_0 = 101325 \text{ Pa} = 760 \text{ torr} = 1,000 \text{ atm}$.

Volumul molar al gazului perfect în condiții normale :

$$V_{\mu 0} = RT_0 / p_0 = 22,4141 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{mol} \cong 22,4 \text{ L/mol} . \quad (15)$$

Numărul lui Loschmidt (concentrația moleculelor unui gaz perfect în condiții normale) :

$$L = p_0 / (kT_0) = N_A V_{\mu 0} = 2,68676 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3} \cong 2,69 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3} . \quad (16)$$

3. Punctele fixe fundamentale ale scării internaționale a temperaturilor (în °C)

a) Punctul de fierbere a oxigenului	-182,970
b) Punctul de topire a gheții (la presiunea normală)	0,000
c) Punctul de fierbere a apei (la presiunea normală)	100,000
d) Punctul de fierbere a sulfului	444,600
e) Punctul de solidificare a argintului	960,8
f) Punctul de solidificare a aurului	1063,0

Punctul triplu al apei este prin convenție $273,16 \text{ K} = 0,01^\circ\text{C}$.

4. Coeficientul de dilatare izobară α_p și coeficientul termic izocor al presiunii α_v la gaze

a) Gazele folosite în termometrie

(presiunea inițială 1 ktorr, intervalul de temperatură 0...100°C)

Gazul	He	H ₂	N ₂	aer	Ne
$\alpha_p, 10^{-3} K^{-1}$	3,6580	3,6588	3,6735	3,6728	3,6600
$\alpha_v, 10^{-3} K^{-1}$	3,6605	3,6620	3,6744	3,6744	3,6617

b) Alte gaze

(p_0 - presiunea inițială, 0...t, °C - intervalul de temperatură)

Gazul	p_0, kPa	0...t, °C	$\alpha_p, 10^{-3} K^{-1}$	$\alpha_v, 10^{-3} K^{-1}$
Aer	30,66	0...1067	-	3,6643
~	2670	0...100	-	3,887
O ₂	24...30,7	0...1067	-	3,6652
~	88	0...100	-	3,6738
~	100 atm	0...100	4,86	-
CO	30,66	0...1067	-	3,6648
~	101,32	0...100	3,669	3,667
CO ₂	32	0...1067	3,6756	-
~	69,3	0...100	3,7073	3,6981
~	133,3	0...100	3,7410	3,7262
N ₂ O	101,32	0...100	3,719	3,676
SO ₂	101,32	0...100	3,903	3,845
NH ₃	101,32	0...50	3,854	-
Ar	86,66	0...100	-	3,6680
N ₂	200 atm	0...100	4,34	-
~	1000 atm	0...100	2,18	-

5. Căldurile specifice ale gazelor în J/(kg · K)

a) La presiune constantă (1 atm) c_p [J/(kg · K)]

Gazul	$t, ^\circ\text{C}$	c_p	Gazul	$t, ^\circ\text{C}$	c_p
Acetilena C_2H_2	-	1680	Dioxid de carbon CO_2	-	845
Aer uscat	20	1006	Dioxid de sulf SO_2	-	629
~	100	1011	Eter etilic $(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{O}$	25...111	1791
~	500	1092	Heliu He	-	5100
~	1000	1192	Hidrogen H_2	-	14230
~	-100	1008	Hidrogen sulfurat H_2S	-	1085
~ (100 atm)	-80	1902	Metan CH_4	-	2210
Alcool metilic CH_4O	101...223	1917	Oxid de azot NO	13...171	971
Amoniac NH_3	-	2170	Oxid de carbon CO	-	1043
Argon Ar	15	523	Oxigen O_2	-	910
Azot N_2	-	1040	Protoxid de azot N_2O	26...103	892
Clor Cl_2	-	507	Sulfura de carbon CS_2	86...190	670
Cloroform CHCl_3	27...118	603	Terebentină $\text{C}_{10}\text{H}_{16}$	179...249	2118
Dioxid de azot NO_2	27...67	680			

b) La volum constant c_v [J/(kg · K)]

Gazul	$t, ^\circ\text{C}$	c_v	Gazul	$t, ^\circ\text{C}$	c_v
Aer	0	718	Hidrogen H_2	≈ 50	10050
Argon Ar	0...2000	312,2	Oxid de carbon CO	1000	950
Azot N_2	0	732	~	1800	1002
Dioxid de carbon CO_2	255	691	Vapori de apă H_2O	100	1463

Observație. Pentru aer: $c_v = 718 + 0,1167 \rho$, unde ρ este densitatea în kg/m^3 . Pentru azot: $c_v = 732 + 0,67 t$, unde t este temperatura în $^\circ\text{C}$. Pentru dioxidul de carbon: $c_v = 691 + 0,889 \rho + 0,00142 \rho^2$, ρ - densitatea. La hidrogen: c_v scade cu creșterea densității și scăderea temperaturii.

6. Exponentul adiabatic $\gamma = C_p / C_v = c_p / c_v$ pentru gaze și vapori

a) Gaze monoatomice

Gazul	$t, ^\circ\text{C}$	γ	Gazul	$t, ^\circ\text{C}$	γ
Argon Ar	0	1,667	Mercur Hg (vapori)	310	1,666
Heliu He	0	1,63	Neon Ne	19	1,642
Kripton Kr	19	1,689	Xenon Xe	19	1,666

b) Gaze diatomice

Gazul	$t, ^\circ\text{C}$	γ	Gazul	$t, ^\circ\text{C}$	γ
Aer (uscat)	- 79,3	1,405	Azot N_2	20	1,401
~	0...17	1,401	Clor Cl_2	-	1,36
~	500	1,357	Hidrogen H_2	4...17	1,407
~	900	1,32	Oxid de azot NO	-	1,394
~ (200 atm)	0	1,828	Oxid de carbon CO	1800	1,297
~ ~	- 79,3	2,333	Oxigen O_2	5...14	1,400

c) Gaze triatomice

Gazul	$t, ^\circ\text{C}$	γ	Gazul	$t, ^\circ\text{C}$	γ
Apă H_2O (vapori)	100	1,334	Dioxid de sulf SO_2	16...34	1,26
Dioxid de azot NO_2	150	1,31	~	500	1,2
Dioxid de carbon CO_2	4...11	1,300	Hidrogen sulfurat H_2S	-	1,340
~	300	1,22	Protoxid de azot N_2O	-	1,324
~	500	1,20	Sulfura de carbon CS_2	-	1,239

d) Gaze poliatomice

Gazul	$t, ^\circ\text{C}$	γ	Gazul	$t, ^\circ\text{C}$	γ
Acetilena C_2H_2	-	1,26	Clorură de etil $\text{C}_2\text{H}_5\text{Cl}$	22,7	1,187
Acid acetic $\text{C}_2\text{H}_4\text{O}_2$	136,5	1,147	~ de metil CH_3Cl	19...30	1,279
Alcool etilic $\text{C}_2\text{H}_6\text{O}$	53	1,133	Etan C_2H_6	-	1,22
~	99,8	1,134	Eter etilic $\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}$	12...20	1,024
Alcool metilic CH_4O	99,7	1,256	~	99,7	1,112
Amoniac NH_3	-	1,336	Etilena C_2H_4	-	1,264
Benzen C_6H_6	20	1,40	Iodură de metil CH_3J	-	1,286
~	99,7	1,105	Metan CH_4	-	1,313
Bromură de etil $\text{C}_2\text{H}_5\text{Br}$	-	1,188	Peroxid de azot N_2O_4	20	1,172
~ de metil CH_3Br	-	1,274	Propan	-	1,130
Cloroform CHCl_3	24...42	1,110	Tetraclorură de carbon CCl_4	-	1,130
~	99,8	1,150			

7. Tensiunea superficială σ a apei la frontiera cu aerul

$t, ^\circ\text{C}$	0	5	10	15	20	25
$\sigma, \text{mN/m}$	75,7	74,92	74,22	73,49	72,75	71,97

30	40	50	60	70	80	100
71,18	69,6	67,9	66,2	64,4	62,6	58,8

8. Tensiunea superficială σ în mN/m a unor lichide, la 20°C.

Valorile subliniate sunt foarte precise

a) La frontiera cu aerul :

Alcool etilic	22,3	Fenol	40,9
- metilic	22,6	Glicerină	63,4
Anilină	43	HNO ₃ conc.	41
Apă	73	H ₂ SO ₄ conc.	55
Apă cu săpun	43	Kerosin	26
Benzen	<u>28,88</u>	Mercur (scade în timp)	500...400
Benzină	28,9	Soluție apă cu săpun	43
Cloroform	<u>27,14</u>	Terebentină	27

b) La frontiera cu vaporii proprii :

Acetonă	23,7	Mercur	472
Alcool etilic	22,8	Sulfură de carbon	32,3
Anilină	42,9	Tetraclorură de carbon	27,0
Bromoform	41,5	Toluen	28,4
Eter etilic	<u>16,96</u>		

9. Tensiunea superficială σ în mN/m la interfața a două lichide, la 20 °C

Apa cu :		Mercur cu :	
Benzen	35	Acetonă	390
Cloroform	28	Benzen	357
Eter etilic	10	Cloroform	357
Tetraclorură de carbon	45		

10. Coeficienții de dilatare ai unor substanțe

Solide . Coeficientul de dilatare *liniară* (la temperatura camerei sau pe intervalul specificat) în $10^{-6} K^{-1}$

Alama		18...23	Fontă		10...11,4
Aluminiu		23	Gheață		51
~	0...600°C	29	Lemn	fibre	3...5
Argint		19	~	⊥ fibre	35...60
~	0...900°C	20,5	Litiu		60
Aur		14	Magneziu		25
~	0...500°C	15	~	0...400°C	30
Ciment		14	Mangan		21
Cobalt		12	Molibden		5
~	25...350°C	18	Nichel		12,8
Constantan		15...17	~	0...1000°C	18
Cositor		21	Nicrom		12...13
~	axă	30,5	Oțel		11
~	⊥ axă	15,5	~	inoxidabil	10...11
Crom		7	Platină		9,9
~	0...900°C	11	~	800°C	11
Cuarț	axă	7,5	Plumb		29
~	⊥ axă	13,7	~	0...320°C	33
~	topit	0,45	Sticlă		8...10
Cupru		16...17	Zinc	axă	60
Duraluminiu		23...27	~	⊥ axă	13
Fier		12	~	laminat	31
~	0...700°C	15	~	laminat ⊥	20
			~	tumat	30

Lichide . (la temperatura camerei $\approx 20^\circ C$) în $10^{-5} K^{-1}$

Acetonă	143	Apă 0...4 °C	- 3,3
Acid acetic	107	~ 4...10	4,8
Acid clorhidric	57	~ 5...10	5,3
Acid sulfuric 100%	56...57	~ 10...20	15,0
Alcool etilic	108...110	~ 20...30	25
~ metilic	119...122	~ 30...40	35
Anilină	85	~ 20...40	30,2
		~ 40...60	45,8
Apă	21	~ 60...80	58,7
		~ 80...100	70,2

continuare :

Benzen	122	Petrol lampant	90
Benzină	124	Sulfură de carbon	119...121
Cloroform	127	Terebentină	96
Eter etilic	163	Tetraclorură de carbon	122
Fenol	79	Toluen	107
Glicerină	47...53	Ulei de măsline	72
Mercur	18,2	~ de transformator	60
Petrol	100		

11. Presiunea vaporilor saturați ai unor substanțe în kPa la 20°C

Substanța	p_s , kPa	Substanța	p_s , kPa
Acetona	24,66	Dioxid de carbon	56,8 atm
Acid acetic	1,55	~ de sulf	3,2 atm
Alcool etilic	5,93	Eter etilic	58,66
~ metilic	11,83	Hidrogen sulfurat	17,7 atm
Amoniac	8,46 atm	Iod	26,7 Pa
Benzina	9,95	Mercur	0,16 Pa
Brom	23,06	Sulfura de carbon	39,73
Cloroform	21,46	Tetraclorura de carbon	12,13

12. Presiunea și densitatea vaporilor saturați ai gheții

t , °C	p_s , Pa	ρ_s , g/m ³	t , °C	p_s , Pa	ρ_s , g/m ³
-75	0,080	-	-6	368	2,99
-60	0,93	-	-5	401	3,24
-30	37,3	0,47	-4	437	3,51
-20	102,6	0,96	-3	476	3,81
-10	260	2,14	-2	517	4,13
-9	284	2,33	-1	563	4,47
-8	309	2,54	0	611	4,84
-7	337	2,76			

13. Presiunea și densitatea vaporilor saturați ai apei

$t, ^\circ\text{C}$	p_s, Pa	$\rho_s, \text{g/m}^3$	$t, ^\circ\text{C}$	p_s, Pa	$\rho_s, \text{g/m}^3$
1	656,5	5,2	21	2483,2	18,3
2	705,3	5,6	22	2640,2	19,4
3	757,1	6,0	23	2805,5	20,5
4	812,5	6,4	24	2979,9	21,8
5	871,4	6,8	25	3163,6	23,0
6	934,0	7,3	26	3357,2	24,5
7	1000,6	7,8	27	3560,9	25,8
8	1071,4	8,2	28	3775,4	27,2
9	1146,4	8,8	29	4001,2	28,7
10	1226,3	9,4	30	4238,6	30,4
11	1310,7	10,0	31	4488,0	
12	1400,4	10,7	32	4750,3	
13	1495,5	11,4	33	5025,6	
14	1596,1	12,0	34	5314,7	
15	1702,6	12,8	35	5618,1	
16	1815,4	13,7	40	7371,4	51,1
17	1934,6	14,5	50	12331	83,0
18	2060,7	15,4	100	101325	600
19	2193,9	16,3	200	15,3 atm	7,9 kg/m ³
20	2334,7	17,3	374	219 atm	286 kg/m ³

14. Presiunea vaporilor saturați ai apei

$t, ^\circ\text{C}$	p_s, kPa	$t, ^\circ\text{C}$	p_s, kPa	$t, ^\circ\text{C}$	p_s, kPa
35	5,6181	60	19,92	90	70,11
36	5,9364	62	21,84	92	75,61
37	6,2703	64	23,90	94	81,46
38	6,6202	66	26,14	96	87,69
39	6,9870	68	28,56	98	94,30
40	7,3714	70	31,16	100	101,32
42	8,1940	72	33,96	102	108,78
44	9,0966	74	36,96	104	116,67
46	10,082	76	40,18	106	125,04
48	11,158	78	43,65	108	133,90
50	12,331	80	47,36	110	143,27
52	13,612	82	51,33	112	153,16
54	14,999	84	55,57	114	163,61
56	16,505	86	60,10	116	174,64
58	18,145	88	64,95	118	186,28

continuare →

continuare :

120	198,5	140	361,3	160	618,1
122	211,4	142	382,2	162	650,1
124	225,1	144	404,2	164	683,5
126	239,3	146	427,0	166	718,3
128	254,4	148	451,0	168	754,5
130	270,1	150	476,0	170	792,1
132	286,6	152	502,1	172	831,1
134	304,1	154	529,3	174	871,7
136	322,2	156	557,7	176	913,7
138	341,3	158	587,3	178	957,4

continuare :

$t, ^\circ\text{C}$	p_s, atm	$t, ^\circ\text{C}$	p_s, atm	$t, ^\circ\text{C}$	p_s, atm
180	9,896	200	15,347	220	22,898
182	10,360	202	16,000	240	33,042
184	10,839	204	16,674	260	46,326
186	11,338	206	17,370	280	63,352
188	11,854	208	18,089	300	84,793
190	12,388	210	18,830	320	111,42
192	12,941	212	19,595	340	144,17
194	13,514	214	20,384	360	184,29
196	14,104	216	21,197	374,1	218,5
198	14,714	218	22,036	<i>punctul critic</i>	

15. Căldura specifică a apei în J/(kg · K)

$t, ^\circ\text{C}$	0	2	4	6	8
0	4217,4	4210,4	4204,5	4199,6	4195,4
10	4191,9	4189,0	4186,6	4184,6	4182,9
20	4181,6	4180,5	4179,7	4179,0	4178,5
30	4178,2	4178,0	4177,9	4178,0	4178,1
40	4178,3	4178,6	4178,9	4179,4	4179,9
50	4180,4	4181,1	4181,7	4182,5	4183,3
60	4184,1	4185,0	4186,0	4187,1	4188,2
70	4189,3	4190,5	4191,8	4193,2	4194,6
80	4196,1	4197,7	4199,4	4201,1	4202,9
90	4204,8	4206,8	4208,9	4211,1	4213,3

16. Căldurile specifice ale unor substanțe în J/(kg·K)
(ultima cifră nu este exactă)

Substanța	$t, ^\circ\text{C}$	c	Substanța	$t, ^\circ\text{C}$	c
Solide :					
Alamă galbenă	0	368	Gheață	0	2100
~ roșie	0	377	Lemn	-	1680...2700
Aluminiu	-	895	Naftalină	-	1300
Argint	-	235	Nichel	-	460
Beton	-	880	Oțel	-	448...470
Cărămidă	-	750	Parafină	0...20	2900
Ciment	-	800	Platină	-	120
Cositor	-	230	Plumb	-	125
Cuarț	0	730	Polietilenă	-	2220
~	350	1170	Polistirol	-	1340
Cupru	-	395	Sticlă crown	10...50	670
Fontă	-	540...550	~ flint	10...50	500
Gheață	-250	150	~ Jena	18	800
~	-160	1000	~ pirex	26	780
~	-21...-1	2000...2100	Zinc	-	390
Lichide :					
Acetonă	-	2180	Fier lichid	-	830
Alcool etilic	0	2290	Glicerină	18...50	2430
~ ~	40	2710	Petrol	-	2140...2170
~ metilic	12	2520	lampant	-	1005
Anilină	15	2150	Sulfură de carbon	-	1005
Apă de mare	17	3930	Terebentină	18	1760
Benzen	10	1420	Tetraclorură de carbon	-	840
~	20	1720	Toluen	18	1670
~	40	1770	Ulei de in	20	1840
Benzină	-	1720	~ de mașini	-	2100
~	50	2095	~ de parafină	20...60	2130...2260
Cloroform	-	980	~ de ricin	20	2130
Eter etilic	18	2340	~ de trans-formator	20	1800...2090

**17. Căldura specifică izobară a elementelor chimice
în J/(kg · K) (ultima cifră nu este peste tot exactă)**

<i>Elementul</i>	<i>t, °C</i>	<i>c_p</i>	<i>Elementul</i>	<i>t, °C</i>	<i>c_p</i>
Aluminiu	- 240	38,5	Grafit	11	670
~	0	877	~	277	975
~	600	1180	~	827	1842
Argint	- 238	61,1	Iod	9...98	226
~	0	233	Litiu	0...19	3510
~	427	247	~	0...100	3890
Aur	- 185...20	146	Magneziu	- 186...79	791
~	18...99	127	~	18...99	1030
Bariu	- 185...20	284	~	225	1176
Beriliu	0...100	1780	Mangan	14...97	511
Bismut	- 186	119	Mercur	0	140,2
~	22...100	127	Molibden	- 185...20	264
Bor crist.	25	1195	~	15...91	301
~ amorf	0...100	1285	Nichel	0	444
Brom lich.	13...45	448	~	500	523
~ solid	- 78...- 20	352	Platină	- 186...18	122,6
Cadmiu	- 165	206	~	18...100	135,6
~	0	229	~	1230	167,4
Calciu	- 185...20	657	Plumb	- 250	60
~	0...100	624	~	0	126,4
Cobalt	- 182...15	343	~	300	141,5
~	15...100	431	Potasiu	- 23	725
~	15...630	515	~	27	800
Cositor	- 186...- 79	203,5	Siliciu crist.	- 185...20	515
~	0	224,5	~	77	762
Cositor lich.	240	268	~	727	938
Crom	- 200	280	Sodiu	- 150	1032
Cupru	- 250	14,6	~	0	1184
~	0	380	~	138	1335
~	97,5	398	Stibiu	- 186...79	193
Diamant	- 186	10,5	~	17...92	213
~	22	510	Sulf rombic	17...45	682
~	53	570	~ lichid	119...147	1060
~	827	1795	Uraniu	0	117
Fier	- 133	322	~	400	151
~	0	436	Wolfram	- 185...200	127
~	97,6	476	~	20...100	142
~	0...1100	641	Zinc	- 233	113,4
~ lichid	1530...3000	830	~	0	385
Germaniu	0...100	310	~	25	400
Grafit	- 188	105	~	0...100	435

18. Constantele termice ale unor elemente chimice

(presiunea 1 atm ; densitatea la 20°C)

Temperaturile subliniate sunt **punctele fixe fundamentale**
ale scării internaționale a temperaturilor

Elementul	Densit., kg/m ³	Temperatura topire, °C	Temper. fierb., °C	Căld. latentă topire, kJ/kg
Aluminiu	2700	660,1	2400	400
Argint	10500	<u>960,8</u>	2180	105
Aur	19300	<u>1063,0</u>	2660	65
Azot	810 (- 196°C)	- 210,0	- 195,8	25,6
Bismut	9800	271,3	1530	55
Brom	3100	- 7,3	58,2	67
Cadmiu	8650	320,9	767	55
Calciu	1550	850	1440	230
Cesiu	1900	28,6	713	16,8
Cobalt	8900	1492	2900	243
Cositor (staniu)	7300	231,9	2600	59
Crom	7100	1900	2600	280
Cupru	8960	1083	2580	205
Fier	7900	1539	2900	270
Fosfor (galben)	1820	44,2	280	21
Hidrogen	-	- 259	- 252	-
Iod	4900	113,6	183	50
Magneziu	1700	650	1100	377
Mercur	13550	- 38,87	356,58	11,7
Nichel	8900	1453	2820	306
Oxigen	1130 (- 184°C)	- 218,8	<u>- 182,970</u>	13,8
Paladiu	12000	1552	3200	151
Platină	21450	1769	3800	113
Plumb	11300	327,3	1750	25
Potasiu (kaliu)	860	63,2	760	63
Seleniu	4800	217	685	352
Sodiu (natriu)	970	97,8	883	113
Stibiu (antimoniu)	16700	630,5	1440	163
Sulf	2100 (romb.)	119	<u>444,600</u>	37,7 (romb.)
Taliu	11850	(monocl.) 304	1460	29
Wolfram	19300	3380	5700	26
Zinc	7100	419,5	907	100

19. Căldurile latente ale unor substanțe (presiunea 1 atm)

Substanța	ρ , kg/m ³ (^o C)	λ_t , kJ/kg (t_t° C)	λ_v , kJ/kg (t_v° C)
Acetonă	787 (25 ^o C)	- (-95 ^o C)	520 (56,5 ^o C)
Acid acetic	1050	184 (16,7 ^o C)	- (118 ^o C)
Alcool etilic	791 (15 ^o C)	- (-117 ^o C)	860 (78,5 ^o C)
- metilic	810 (15 ^o C)	- (93,9 ^o C)	1120 (64,1 ^o C)
Amoniac	0,77	- (-77,7 ^o C)	1370 (-33,4 ^o C)
Apă	-	335 (0 ^o C)	2256,67 (100 ^o C)
Azot	810 (-196 ^o C)	- (-210,0 ^o C)	200 (-195,8 ^o C)
Benzină	899 (15 ^o C)	130	390 (80,2 ^o C)
Ceară de albine	-	176 (62 ^o C)	-
Eter	736 (15 ^o C)	- (-116 ^o C)	370 (34,5 ^o C)
Fier	7900	270 (1539 ^o C)	58 (2900 ^o C)
Fontă albă	-	130...140	-
- cenușie	7000	96...100 (1150 ^o C)	-
Glicerină	1260 (15 ^o C)	176 (20 ^o C)	- (290 ^o C)
Mercur	13550	- (-38,87 ^o C)	272 (356,58 ^o C)
Naftalină	1140 (20 ^o C)	151 (80,2 ^o C)	- (218 ^o C)
Oxigen	1130 (-184 ^o C)	- (-218,8 ^o C)	213 (-182,970 ^o C)
Parafină	900	150	- (390 ^o C)
Sulfură de carbon	1290	- (-111 ^o C)	351 (46,3 ^o C)
Terebentină	870	-	294 (160 ^o C)
Tetraclorură de carbon	1630 (0 ^o C)	- (-23 ^o C)	193 (76,7 ^o C)

20. Căldura latentă de vaporizare Λ a apei în kJ/kg

t , ^o C	Λ , kJ/kg	t , ^o C	Λ , kJ/kg	t , ^o C	Λ , kJ/kg
0	2500,58	30	2429,97	90	2282,73
5	2488,87	40	2406,16	100	2256,67
10	2477,15	50	2382,12	130	2174,14
15	2465,40	60	2357,84	150	2114,30
20	2453,61	70	2333,22	170	2049,35
25	2441,80	80	2308,21	200	1940,40

21. Puterea calorică a unor combustibili

Solide , în MJ/kg		Lichide , în MJ/kg	
Cărbune brun	9,3...9,9	Alcool etilic	27
~ manganal	29,7...33	~ metilic	29
Cocs	30,3	Benzină	46
Huilă	30,3	Păcură (Diesel)	42
Lemn uscat (paie)	8,3...10	Petrol	46
Turbă	15	~ lampant	43,1
Gaze , în MJ/Nm ³			
Gaz de cocs	16,4	Metan	39
~ de iluminat	21		
~ natural	35,5		
Combustibil convențional : 30 MJ/kg			

22. Densitățile unor substanțe în kg/m³

Solide (la temperatura camerei : 17...23 °C)					
Alamă	8500	Cupru	8890	Oțel	7800...7900
Aluminiu	2700	Duraluminiu	2800	Platină	21450
Argint	10400	Fier	7800	Plumb	11340
Aur	19300	Fontă	7000...7100	Plută	200...250
Constantan	8900	Gheață(0°C)	917	Sticlă	2400...2800
Cositor	7300	Nichel	8800...8900	Wolfram	19300
Cuarț crist.	2600	Nichelină	8800	Zinc	7000...7100
Lichide (la 15 °C)					
Acetonă	792	Benzen	850...880	Lapte	1030
Alcool etilic	791	Benzină	700...900	Petrol	780...800
~ metilic	810	Eter	720...736	Ulei	900...950
Apă de mare	1027	Glicerină	1260	Terebentină	850...870
Gaze (în condiții normale)					
Acetilenă	1,17	Azot	1,251	Hidrogen	0,0899
Aer	1,2928	Clor	3,220	Metan	0,7167
Amoniac	0,7708	CO ₂	1,9768	Neon	0,900
Argon	1,783	Heliu	0,1785	Oxigen	1,429

CUPRINS

Paq.

<i>Breviar</i>	3
1. Legile gazului perfect	
1.1. Transformările izocoră și izobară	9
1.2. Transformarea izotermă	13
1.3. Transformarea generală	39
1.4. Ecuația de stare	51
1.5. Amestecuri de gaze	77
2. Principiile termodinamicii	
2.1. Transformările simple	92
2.2. Transformarea adiabatică și alte transformări	104
2.3. Ciclul Carnot și alte cicluri	133
3. Teoria cinetico-moleculară	160
4. Fenomene superficiale la lichide	
4.1. Tensiunea superficială	181
4.2. Fenomene capilare	191
5. Dilatometrie și termometrie	
5.1. Dilatarea solidelor	206
5.2. Dilatarea lichidelor	214
5.3. Termometrie	223
6. Vaporii. Higrometrie	
6.1. Vaporii saturanți și nesaturanți	226
6.2. Higrometrie	224
7. Calorimetrie	
7.1. Calorimetrie simplă	253
7.2. Topirea și solidificarea	259
7.3. Vaporizarea și condensarea	265
7.4. Căldura și energia mecanică	272
8. Probleme recapitulative	281

Sistemul Internațional de unități	287
Elemente de calcul al erorilor	292
Trasarea graficelor	310

ANEXE

1. Formule de aproximație	319
2. Câteva unități de măsură și constante fizice	320
3. Punctele fixe fundamentale ale scării internaționale a temperaturilor	321
4. Coeficientul de dilatare izobară și coeficientul termic izocor al presiunii la gaze	322
5. Căldurile specifice ale gazelor	323
6. Exponentul adiabatic pentru gaze și vapori	324
7. Tensiunea superficială a apei	325
8. Tensiunea superficială a unor lichide	325
9. Tensiunea superficială la interfața a două lichide	325
10. Coeficienții de dilatare ai unor substanțe	326
11. Presiunea vaporilor saturați ai unor substanțe	327
12. Presiunea și densitatea vaporilor saturați ai gheții	327
13. Presiunea și densitatea vaporilor saturați ai apei	328
14. Presiunea vaporilor saturați ai apei	328
15. Căldura specifică a apei	329
16. Căldurile specifice ale unor substanțe	330
17. Căldura specifică izobară a elementelor chimice	331
18. Constantele termice ale unor elemente chimice	332
19. Căldurile latente ale unor substanțe	333
20. Căldura latentă de vaporizare a apei	333
21. Puterea calorică a unor combustibili	334
22. Densitățile unor substanțe	334

* * *

Lucrarea se adresează elevilor de clasa a X-a și a XI-a, precum și celor care se pregătesc pentru examenul de bacalaureat și admitere în învățământul superior.

Conține 484 probleme de termodinamică.

Toate problemele sunt rezolvate complet și amănunțit.



ISBN 973 - 98346 - 1 - 2

EDITURA APH - SRL
str. Caporal Preda nr. 12, sect. 5 București
tel. 423.12.60, 425.84.77
<http://www.edituraaph.go.ro>